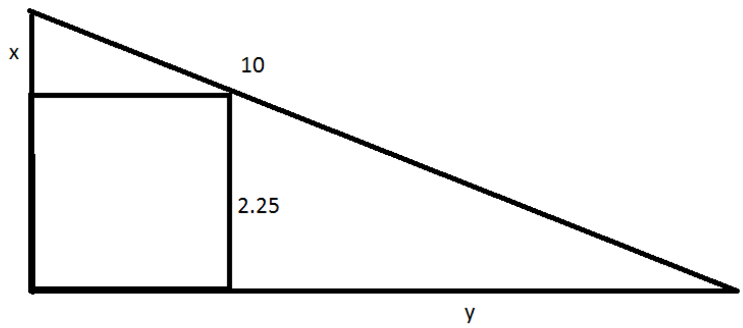
Bonus opgave - Uitwerking

Schematisch kunnen we de situatie als volgt weergeven:



x is dus het stukje vanaf de kubus tot het raam, en y het stuk vanaf de kubus tot aan de plek waar de houten plaat de grond raakt. Voor het gemak in de berekeningen, schrijven we kommagetallen als breuken: $2.25 = \frac{9}{4}$.

Allereerst merken we op dat we twee gelijkvormige driehoeken zien, namelijk het kleine driehoekje linksboven, en de driehoek rechtsonder. We mogen dus concluderen dat

$$\frac{9}{4x} = \frac{4y}{9},$$

oftewel

$$xy = \frac{81}{16}$$

Het tweede stuk informatie dat we gebruiken is natuurlijk de stelling van Pythagoras:

$$(x + \tfrac{9}{4})^2 + (y + \tfrac{9}{4})^2 = 100$$

Uitschrijven geeft

$$\color{red}{x^2 + y^2 + \tfrac{81}{8}} + \tfrac{9}{2}(x + y) = 100$$

De rode term in de bovenstaande vergelijking kunnen we vervangen door $(x+y)^2$. Immers,

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2 \cdot (\tfrac{81}{16}) = \color{red}{x^2 + y^2 + \tfrac{81}{8}}.$$

Dus rest ons nog de vergelijking

$$(x + y)^2 + \tfrac{9}{2}(x + y) - 100 = 0$$

Uit de abc formule, en het feit dat $(x + y)$ een positief getal moet zijn, kunnen we dan concluderen dat $(x + y) = 8$. Onthoud dat we nog steeds weten dat $xy = \frac{81}{16}$, oftewel $y = \frac{81}{16x}$. Combineren geeft

$$x + \tfrac{81}{16x} - 8 = 0$$

UNIVERSITY OF TWENTE.

Opgave 1 - Uitwerking

Om tot het eindantwoord te komen, moeten we de constante snelheden waarmee Ruben, Joanan en Niels de glazen wassen bepalen. We kunnen bijvoorbeeld gewoon aannemen, dat:

- Ruben ramen wast met een snelheid van r ramen per uur;
- Joanan ramen wast met een snelheid van j ramen per uur
- Niels ramen wast met een snelheid van n ramen per uur

Stel dat De Horst uit x ramen bestaat, dan leiden we de volgende vergelijkingen af uit de gegevens in de opgave:

$$\frac{x}{r+j} = 45$$

$$\frac{x}{j+n} = 60$$

$$\frac{x}{r+n} = 90$$

Oplossen van deze vergelijkingen (vul elke vergelijking in in de andere), geeft de oplossing

$$x = 360n$$

$$r = 3n$$

$$j = 5n$$

$$n = n$$

De tijd die ze met zijn drieën nodig hebben om De Horst te wassen, is dus:

$$\frac{x}{r+n+j} = \frac{360n}{3n+5n+n} = \frac{360n}{9n} = 40\text{uur}$$

Opgave 2 - Uitwerking

Vraag 1:
De formule om de inhoud te bereken is basis x hoogte. In het geval van het blikje is de basis gelijk aan de oppervlakte van een cirkel met straal r: πr^2. Als we als hoogte h nemen, is de inhoud I gelijk aan

$$\pi r^2 h.$$

Gegeven is dat de inhoud van het blikje gelijk is aan 0,33L, wat gelijk is aan 330cm^3. Als we dit gebruiken bij de formule hierboven krijgen we het volgende:

$$I = \pi r^2 h = 330 \;\Rightarrow\; h = \frac{330}{\pi r^2}.$$

Vraag 2:
De formule voor de hoeveelheid gebruikt materiaal is gelijk aan de buitenkant van het blikje. Deze buitenkant bestaat uit een boven en onderkant, en een cilindervormig stuk. Voor de oppervlakte van de boven en onderkant geldt

$$O(boven) = O(onder) = \pi r^2,$$

aangezien dit gewoon de oppervlakte van een cirkel met straal r is.

Voor het cilindervormige stuk stellen we ons voor dat we boven en onderkant van het blik eraf knippen en vervolgens het cilindervormige stuk doorknippen en uitrollen tot een rechthoek. De breedte van deze rechthoek is de omtrek van de bovenkant (of onderkant) en de hoogte is gelijk aan h. Er geldt dus:

$$O(cilindervormig) = 2\pi r h.$$

Wanneer we de oppervlakte van alle losse delen bij elkaar optellen krijgen we de oppervlakte van de buitenkant van het blik:

$$O(blik) = O(cilindervormig) + 2O(boven) = 2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2.$$

Nu gebruiken we de formule voor h uit vraag 1 en vullen dit in bij de oppervlakte van het blik:

$$O(blik) = 2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2 = 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{660}{r} + 2\pi r^2$$

Nu vullen we de mogelijke stralen voor het blik in en zien we dat de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst is bij $r = 4$, namelijk ongeveer 265,53 cm^2. Twente Academy moet dus een blik kiezen met een straal van 4cm.

Opgave 3 - Uitwerking

Vraag 1:
Als een wiel met straal r precies 1 omwenteling maakt, wordt precies de omtrek van de wiel in afstand afgelegd: $2\pi r$. Wanneer een fiets nu een snelheid heeft van $v_{\text{werkelijk}}$ m/s, worden er per seconde dus $\frac{v_{\text{werkelijk}}}{2\pi r}$ omwentelingen gemaakt.

Nu is gegeven dat de camera b beeldjes per seconde maakt, wat neerkomt op het maken van een beeldje elke $1/b$ seconden. In de tijd tussen twee opeenvolgende beeldjes ($1/b$ seconden), vinden dus $\frac{v_{\text{werkelijk}}}{2\pi rb}$ omwentelingen plaats.

Vraag 2:
Als in werkelijkheid 4.3 omwentelingen plaatsvinden, zal het op het filmpje lijken alsof er maar 0.3 omwentelingen plaatsvinden. Zo ook met 2.3 omwentelingen; op het filmpje zal het lijken alsof er opnieuw 0.3 omwentelingen plaatsvinden. We kunnen dus zeggen dat er geen verschil te zien is op het filmpje tussen het aantal omwentelingen wanneer er precies een geheel aantal omwentelingen afgaat of bijkomt: voor k willekeurig en geheel zal bij $4.3 + k$ omwentelingen in werkelijkheid, geen verschil te zien zijn in het filmpje t.o.v. het geval met 4.3 omwentelingen in werkelijkheid.

Vraag 3:
Bedenk dat een deel van de informatie tussen twee opeenvolgende beeldjes verloren gaat. Naast het voorbeeld in vraag 2 nog een voorbeeld:

Wanneer 2.2 omwentelingen plaatsvinden tussen twee opeenvolgende beeldjes zal dit niet zichtbaar zijn in het filmpje dat gemaakt wordt; daar lijkt het alsof slechts 0.2 omwenteling plaatsvinden; het wiel lijkt langzaam vooruit te draaien.

Wanneer er echter 1.8 omwentelingen plaatsvinden tussen twee opeenvolgende beeldjes, zal het lijken alsof er 0.8 omwentelingen plaatsvinden; het wiel lijkt -0.2 omwentelingen te maken (de andere kant op). Blijkbaar speelt het dus een rol of het decimale deel van het aantal omwentelingen groter of kleiner dan 0.5 is. Bovenstaande observaties vormen een basis voor het opstellen van de formule van Harm.

Uit het voorbeeld valt af te leiden dat slechts het decimale deel d van het aantal omwentelingen een rol speelt bij de snelheid die in het filmpje waargenomen zal kunnen worden. Wanneer $1 > d > 0.5$ zal het lijken alsof het wiel $d - 1$ omwentelingen maakt (1-d omwentelingen achteruit). Wanneer $0 < d < 0.5$ zal het lijken alsof het wiel d omwentelingen maakt. Tot slot zal het bij $d = 0$ en $d = 1$lijken alsof het wiel stilstaat (bedenk waarom!). Wanneer we nu gebruikmaken van de functie round(x), die het getal x afrond naar het dichtstbijzijnde gehele getal, kunnen we het bovenstaande gedrag samenvatten in een functie die bepaald hoeveel omwentelingen per seconde O worden waargenomen door de camera:

$$O_{\text{film}} = O_{\text{werkelijk}} - \text{round}\left(O_{\text{werkelijk}}\right).$$

Verifieer dit door 1.8 en 2.2 in te vullen en het resultaat te vergelijken met de dis-

Opgave 4 - Uitwerking

Uit de opgave leiden we een aantal eigenschappen van x af:

Er bestaan gehele getallen a, b, c, d, e, en f zodat

$$\begin{aligned} x &= 2a + 1 \\ x &= 3b + 1 \\ x &= 4c + 1 \\ x &= 5d + 1 \\ x &= 6e + 1 \\ x &= 7f \end{aligned}$$

Dit is de enige informatie die we krijgen, dus daar zullen we het mee moeten doen. We gaan deze zes vergelijkingen nu beurt voor beurt gebruiken om achter de minimale waarde voor x te komen. We beginnen bij het feit dat

$$2a + 1 = x = 3b + 1,$$

en dus

$$2a = 3b$$

Deze vergelijking kan alleen kloppen als $a = 0, 3, 6, 9, 12, ...$ omdat we het hebben over gehele getallen. Dus $a = 3k$, met k een willekeurig geheel getal. En dus, geldt

$$2(3k) + 1 = x = 4c + 1,$$

$$6k = 4c$$

wat alleen kan gelden voor $k = 2, 4, 6, ...$ Dus $k = 2m$, met m een geheel getal. Invullen geeft weer

$$6(2m) + 1 = 5d + 1,$$

$$12m = 5d.$$

Dit is alleen mogelijk voor $m = 0, 5, 10, 15, ...$ Dus m=5n, met n een geheel getal. Wederom invullen:

$$12(5n) + 1 = 6e + 1$$

$$60n = 6e.$$

Dit geeft ons geen extra informatie, want deze vergelijking is waar voor alle n. Dus gebruiken we de laatste vergelijking:

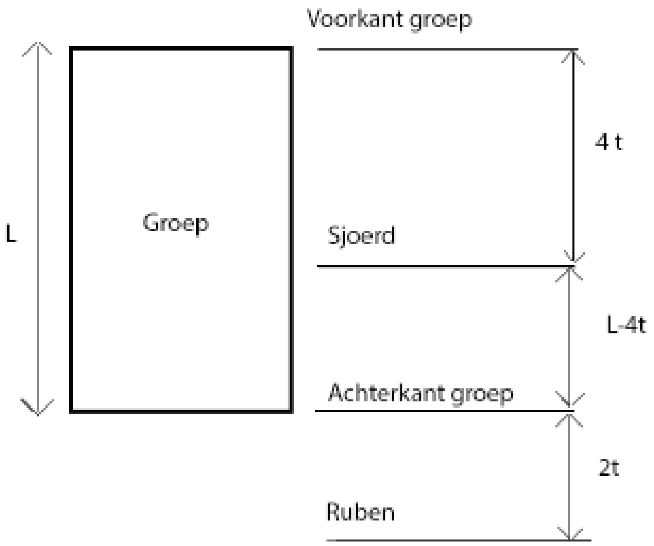
$$60n + 1 = x = 7f.$$

Voor welke n is dit waar? We passen een truucje toe, om dat makkelijker te kunnen zien:

$$\begin{aligned} (7 \cdot 8 + 4)n + 1 &= 7f \\ 4n + 1 &= 7(f - 8). \end{aligned}$$

Opgave 5 - Uitwerking

Stel dat Rob er t uur over doet om bij Ruben te komen, hoeveel hebben de anderen dan afgelegd? We schetsen de situatie om een beter beeld te krijgen.



Aangezien de groep $6t$ kilometer af heeft gelegd, en Sjoerd $2t$, is de afstand tussen de voorkant van de groep en Sjoerd $4t$ km. Als we verder aannemen dat de lengte van de groep gelijk aan L is, dan is de afstand tussen Sjoerd en de achterkant van de groep $L - 4t$. Ruben loopt met 4 km/u achter de groep aan en zal dus 2 km/u minder afleggen; in t uur legt hij dus $2t$ km minder af.

We gaan er vanuit dat Ruben begint te lopen op het moment dat Rob naar hem toe komt. Rob moet L km afleggen om bij Ruben te komen, en ze lopen naar elkaar met een relatieve snelheid van 9 km/u. Er zal dus gelden

$$t_1 = \frac{L}{9},$$

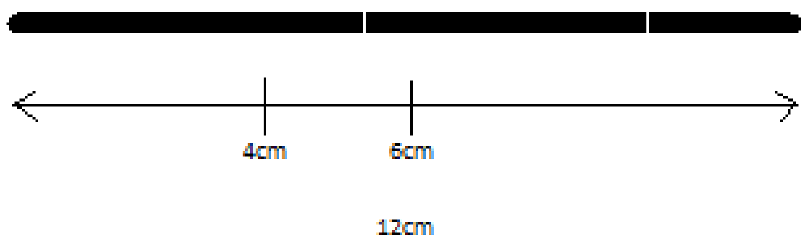
met t_1 in uren.

Rob legt in deze t_1 uur $5t_1 = \frac{5L}{9}$ kilometer af, en Sjoerd legt in dezelfde t_1 uur $\frac{2L}{9}$ kilometer af. Aangezien de twee van elkaar af bewegen zal de onderlinge afstand tussen Rob en Sjoerd, wanneer Rob bij Ruben is aangekomen, $\frac{7L}{9}$ kilometer bedragen. Dat deze afstand tussen de twee correct is valt ook af te leiden uit het plaatje. Volgens het plaatje is de afstand

$$L - 4t + 2t = L - 2t = L - \frac{2L}{9} = \frac{7L}{9}$$

Opgave 6 - Uitwerking

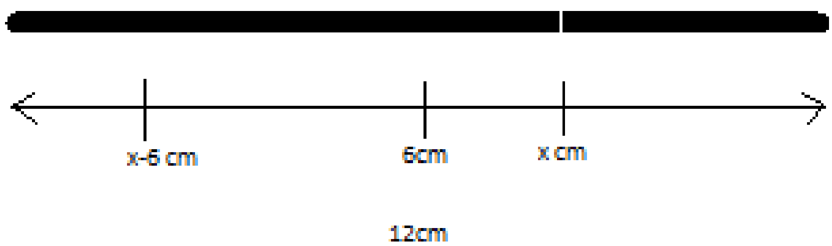
a)
De lengte van het metalen staafje heeft natuurlijk geen inlvoed op de gevraagde kans, dus kunnen we net zo goed aannemen dat de staafjes 12cm lang zijn; dit rekent makkelijker. Zie hieronder een willekeurig staafje dat op twee plekken is doorgezaagd, en waarbij we de daardoor ontstane kleinere staafjes op volgorde van groot (links) naar klein (rechts) hebben gesorteerd.



Noem l de lengte van het linker staafje. De lengte van het grootste staafje is natuurlijk altijd groter of gelijk aan 4cm, dus $l \geq 4$. l is echter niet groter dan de som van de lengtes van de andere twee staafjes, wanneer $l \leq 6$. De gevraagde kans, is dus de kans dat l tussen de 4 en de 6 cm ligt, terwijl we weten dat l tussen de 4 en de 12 cm ligt. Deze kans is

$$P(4 \leq l \leq 6) = \frac{6-4}{12-4} = \frac{1}{4}$$

b)
Zoals aangegeven in de opgave, noemen we de lengte van het langste staafje x. Dit staafje wordt willekeurig door midden gezaagd. De vraag is nu waar we mogen zagen, zodat er geen staafje ontstaat die groter is dan de andere twee. Dit is het geval, als er bij het doorzagen van het langste staafje, geen staafje ontstaat die groter is dan een 6 cm.

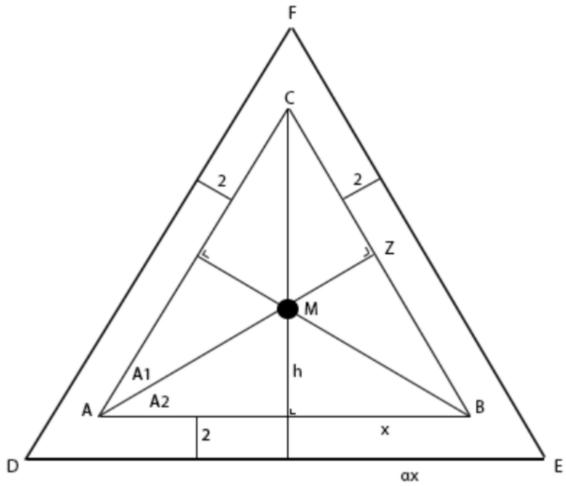


Dit is het geval wanneer het langste staafje doormidden wordt gezaagd in het gebied van $(x-6)$ tot 6 cm. Die kans is

$$P(\text{zagen tussen } (x-6) \text{ en } 6 \text{ cm}) = \frac{6-(x-6)}{x} = \frac{12-x}{x}.$$

Opgave 7 - Uitwerking

Bewijs hulpstelling Als eerste bewijzen we de stelling in de hint, zodat we deze daarna kunnen gebruiken. Aangezien we te maken hebben met een gelijkzijdige driehoek weten we dat alle hoeken gelijk zijn aan 60°. Neem nu de bissectrice van een hoek, kies bijvoorbeeld $\angle BAC$, en noem het punt waar de bissectrice de zijde EF snijdt Z (zie de figuur hieronder).



Uit de definitie van een bissectrice volgt dat $\angle CAZ = \angle BAZ = 30°$. We weten ook dat $\angle ACZ = 60°$ omdat ABC een gelijkzijdige driehoek is. Nu volgt

$$180° = \angle CAZ + \angle ACZ + \angle AZC = 30° + 60° + \angle AZC \ \Rightarrow\ \angle AZC = 90°.$$

Wanneer we nu definieren $A1 = \angle CAZ$, en $A2 = \angle BAZ$ en we nemen de tangens van deze hoeken krijgen we

$$\tan(A1) = \frac{CZ}{AZ} = \tan(A2) = \frac{BZ}{AZ} \ \Rightarrow\ CZ = BZ.$$

Bovenstaande procedure passen we toe op alle hoeken, en het resultaat is dan de figuur hierboven.

Opmerking:
Waarschijnlijk is het trucje van de verhoudingen tussen zijden in een 30-60-90 driehoek niet bij alle leerlingen bekend (namelijk dat de zijden in deze driehoeken zich verhouden als 1:2:$\sqrt{3}$). Vandaar zullen we een algemene berekening geven waarin dit trucje niet wordt gebruikt. Als je dit trucje wel kent mag je het natuurlijk gebruiken en wordt de uitwerking uiteraard een heel stuk korter.

Berekening oppervlakte:
We weten dat alle bissectrices van een driehoek elkaar snijden in het middelpunt van de omgeschreven cirkel (in dit geval M), dus

$$AM = BM = CM.$$

Opgave 8 - Uitwerking

Deze opgave vergt wiskundig inzicht in combinatie met logsich nadenken! Je kunt jezelf een ellendig lange berekening met verschillende dichtheden besparen, wanneer je inziet dat in de evenwichtssituatie geldt dat

$$h_A = h_B = h_C = h_D = h_E.$$

De reden dat dit geldt, is het zinnetje in de opgave dat zegt: *"In deze evenwichtssituatie mag je ervan uitgaan, dat alle vloeistoffen homogeen met elkaar vermengd zijn geraakt: de vloeistof in E is niet meer te onderscheiden van die in A. "* Dit impliceert namelijk dat de dichtheden van de vloeistoffen in de eindsituatie voor elke cilinder gelijk zijn. We leiden nu eerst natuurkundig af dat in de evenwichtssituatie dan inderdaad geldt

$$h_A = h_B = h_C = h_D = h_E.$$

In de evenwichtssituatie moet namelijk gelden dat de hydrostatische druk op de bodem van cilinder A (P_A) gelijk is aan de druk op de bodem van cilinder B (P_B), gelijk aan die op de bodem van C, etc. Met andere woorden:

$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E.$$

Aan de hand van de hint weten we dat dit kan worden geschreven als

$$\frac{F_A}{A_A} = \frac{F_B}{A_B} = \frac{F_C}{A_C} = \frac{F_D}{A_D} = \frac{F_E}{A_E},$$

waarbij F de kracht is die de vloeistof in de cilinder uitoefent op het grondoppervlak A van de cilinder. Maar aangezien de dichtheden van de vloeistoffen in de cilinders in de eindsituatie gelijk zijn, is de kracht (F) evenredig aan het volume (V) van de vloeistof. Er moet dus gelden

$$\frac{V_A}{A_A} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{V_C}{A_C} = \frac{V_D}{A_D} = \frac{V_E}{A_E}, \tag{1}$$

Waarbij we dus geen rekening hoeven te houden met dichtheden van de vloeistoffen! En aangezien voor een cilinder geldt dat $V = A \cdot h$, verkrijgen we het gewenste resultaat:

$$h_A = h_B = h_C = h_D = h_E.$$

Maar wat is deze hoogte, die voor elke cilinder gelijk is? Hiervoor berekenen we eerst het totale volume van alle vloeistoffen in de beginsituatie: dit volume is gelijk is aan

$$\begin{aligned} V_{totaal} &= V_A + V_B + V_C + V_D + V_E \\ &= (400\pi)100 + (900\pi)10 + (100\pi)44 + (2500\pi)60 + (676\pi)20 \\ &\approx 681474 m^3 \end{aligned}$$

Uit vergelijking (1) kunnen we nu afleiden dat in de evenwichtssituatie geldt:

$$V_B = \frac{A_B}{A_A} V_A \ , \ V_C = \frac{A_C}{A_A} V_A \ , \ V_D = \frac{A_D}{A_A} V_A \ , \ V_E = \frac{A_E}{A_A} V_A$$