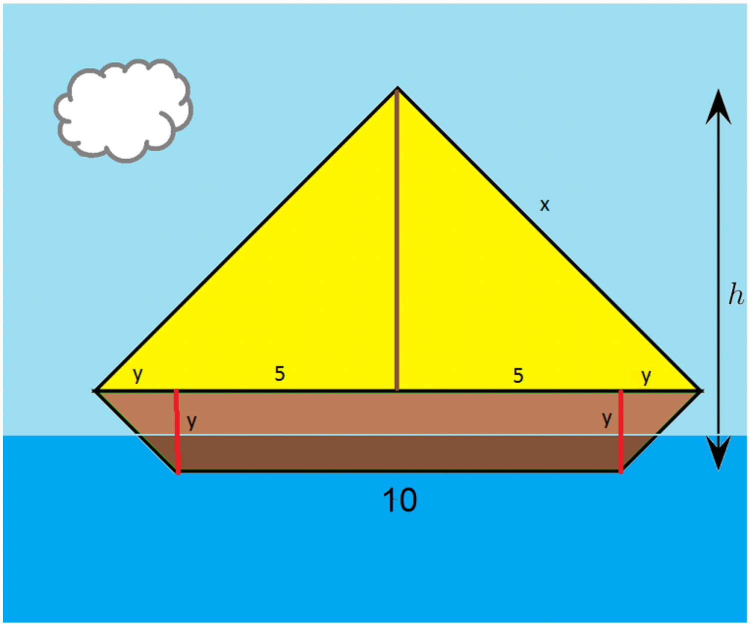
Opgave 3 - Uitwerking



Teken de rode hulplijntjes, en noem de lengte van dit lijntje y. Noem verder de lengte van een zijde van de gelijkzijdige driehoek x. Door de hoek van 45 graden in de romp, weten we dat

$$x = 10 + 2y$$

.

$$y = \frac{1}{2}x - 5 \tag{1}$$

Verder is bekend dat de hoeken in een gelijkzijdige driehoek allen 60 graden zijn. Dus geldt:

$$\sqrt{3} = \tan(60) = \frac{h - y}{\frac{1}{2}x}$$

$$\implies h = \frac{x\sqrt{3}}{2} + y \tag{2}$$

Dus, combineren van vergelijkingen (1) en (2) levert ons

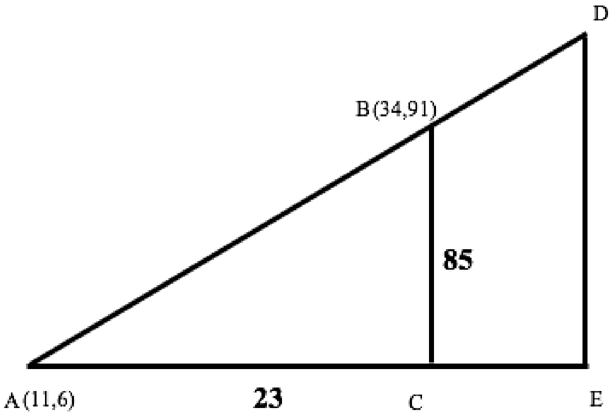
$$h = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})x - 5 \tag{3}$$

Opgave 6 - Uitwerking

Vraag A:

Er zijn veel mogelijke manieren om deze vraag op te lossen. Een daarvan is door middel van gelijkvormige driehoeken en deze zullen we hier behandelen.

Voor elk punt waarover de knikker rolt, kan een gelijkvormige driehoek worden opgesteld. Van gelijkvormige driehoeken is bekend dat verhoudingen behouden blijven, zo ook in dit geval. Zie de figuur hieronder voor een illustratie van het idee:



In de figuur zijn de bijbehorende lengte van de zijde er bij gezet. Voor elk punt op de baan van de knikker moet dus gelden

$$\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b}} = \frac{85}{23},$$

waarbij h en b respectievelijk de bijbehorende hoogte en breedte van de driehoek zijn.

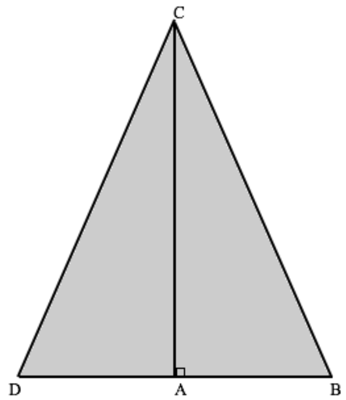
In ons geval zien we dat slechts het punt (57,176) voldoet aan deze voorwaarde:

$$\frac{176-6}{57-11} = \frac{170}{46} = \frac{85}{23}.$$

Dit is dus het enige punt dat op de lijn ligt.

Opgave 1 - Uitwerking

Vraag A:
Om te bewijzen dat Jos' vermoeden klopt bekijken we als eerst een driehoek die wordt gebruikt om de oppervlakte van de cirkel te benaderen. We hebben in de figuur hieronder de hulplijn getekend die zal helpen bij het berekenen van de oppervlakte ervan.



We weten dat lijnstuk BC en CD lengte R hebben, waarbij R de radius van de cirkel is. Ook kunnen we de hoek $\angle BCD$ uitdrukken in het totaal aantal driehoeken, N:

$$\angle BCD = \frac{2\pi}{N} \;\Rightarrow\; \angle ACB = \angle ACD = \frac{\pi}{N}.$$

We kunnen nu van deze zelfde hoek de sinus nemen om het volgende te krijgen:

$$\sin(\angle ACB) = \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{R} \quad\Rightarrow\quad AB = \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) R.$$

Om de oppervlakte te kunnen berekenen hebben we ook de hoogte van de driehoek, AC, nog nodig:

$$\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{R} \;\Rightarrow\; AC = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) R.$$

We kunnen nu bovenstaande stappen gebruiken om de oppervlakte van deze driehoek te berekenen:

$$O(\triangle DBC) = 0.5 \times DB \times AC = AB \times AC = \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) R \times \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) R$$

$$\Rightarrow\; O(\triangle DBC) = \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) R^2 = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) R^2.$$

Opgave 2 - Uitwerking

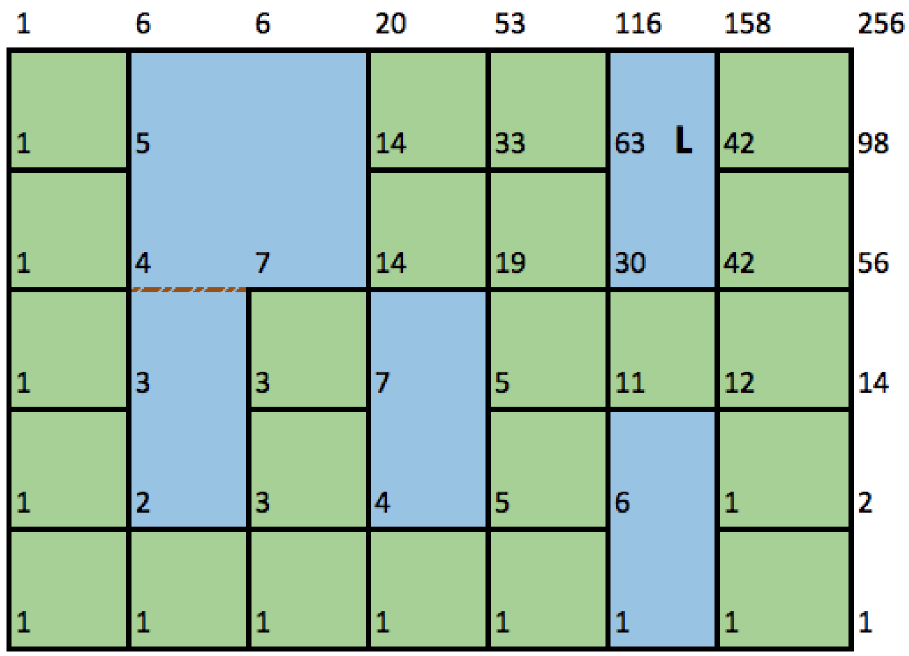
a) Doordat de diameter van de nanodeeltjes als verwaarloosbaar mag worden aangenomen, is na elke botsing van twee nanodeeltjes de situatie precies hetzelfde als wanneer de nanodeeltjes door elkaar heen zouden kunnen bewegen. Daaruit volgt direct dat de langst mogelijke duur van het experiment wordt behaald wanneer er een nanodeeltje aan het begin of eind van de buis wordt geplaatst, en dan richting het andere uiteinde in beweging wordt gebracht. Er zijn meerdere beginsituaties waarbij een even lange duur van het experiment wordt behaald, maar langer is onmogelijk.

b) In deze opgave maken we wederom gebruik van het feit dat de nanodeeltjes door elkaar heen lijken te bewegen. We moeten nu echter oppassen, want elk nanodeeltje heeft nu een onderscheidende eigenschap. Stel dat een nanodeeltje met snelheid **x** er precies 1 minuut over doet om een rondje af te leggen in de cirkelvormige buis. Wanneer er dan op een bepaald tijdstip een nanodeeltje op plaats **y** is en netzoals allerlei andere nanodeeltjes in de buis met snelheid**x** beweegt en botst, dan weten we zeker dat er na n minuut weer een nanodeeltje op plaats **y** is. Welke eigenschap dit nanodeeltje heeft, weten we niet. Wat we wel weten, is dat een nanodeeltje met, laten we zeggen eigenschap A, "opgesloten" zit tussen zijn twee buren, vanwege het botsen. Daarom lijkt het na elke minuut alsof de hele beginsituatie een bepaald aantal posities is door gedraaid. Wat dit aantal posities is, hangt af van het aantal deeltjes en de snelheid **x**. Stel dat er in de beginsituatie N nanodeeltjes in de buis worden geplaatst, en dat na elke minuut deze situatie p posities verder is gedraaid. Dan weten we dat in ieder geval na $N \cdot p$ minuten, de beginsituatie weer wordt aangenomen. En al eerder wanneer de grootste gemeenschappelijke deler van N en p kleiner is dan $N \cdot p$.

Opgave 4 - Uitwerking

Vraag A:
Om het aantal routes te berekenen splitsen we het probleem op in stapjes. We bekijken van linksonder naar rechtsboven hoeveel mogelijkheden er zijn om bij een bepaalde plaats te komen.

Stel dat we ons bevinden in een willekeurig punt X, dat niet aan de rand ligt van het park of het water. Als we ons alleen van links naar rechts of van onder naar boven mogen bewegen, zijn de enige twee mogelijkheden om het punt X te bereiken van onder of van links. Als we weten wat het aantal mogelijkheden is om in het punt links van ons te komen, en wat het aantal mogelijkheden is om in het punt onder ons te komen kunnen we deze bij elkaar optellen om het aantal mogelijkheden te verkrijgen om in het punt X te komen. We passen deze strategie toe op ons probleem in de figuur hieronder. De getallen rechtsboven de punten zijn het aantal mogelijkheden om bij die punt te komen.



We zien in de figuur hierboven dat het aantal mogelijkheden om van A naar B te komen gelijk is aan 256.

Opgave 5 - Uitwerking

Onze oplossing is geïnspireerd door het volgende gegeven: Voor getallen a en b geldt dat

$$(a+1)(b+1) = a + b + ab + 1. \tag{1}$$

In het begin zijn er 12 verschillende atomen. Bekijk nu eens het getal

$$W = (1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1)...(12+1) = 13!$$

en laat bijvoorbeeld atoom 3 met atoom 6 botsen. Dan weten we dat er een nieuw atoom ontstaat: atoom 27. Het getal W is na deze botsing:

$$W = (1+1)(2+1)(4+1)(5+1)(7+1)...(12+1)(27+1)$$

De waarde van het getal W verandert niet! Dit komt precies door het gegeven in vergelijking (1). Immers, $(3+1)(6+1) = (27+1)$. Kortom, bij elke botsing blijft het getal W gelijk, en dus ook bij de laatste botsing. Hieruit volgt dat het aantal elektronen van het atoom dat ontstaat bij de laatste botsing, gelijk is aan $13! - 1$. Op welke manier je de atomen met elkaar laat botsen, maakt dus niet uit! Elke tactiek levert een zelfde laatste atoom op. Voor de volledigheid:

$$13! - 1 = 6227020799$$