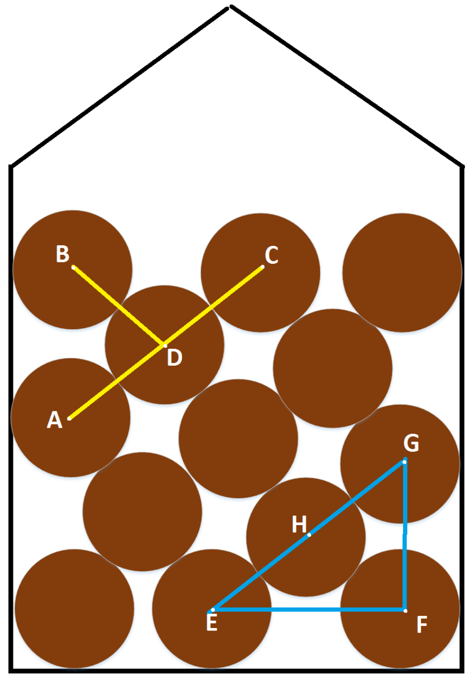
Opgave 1 - Uitwerking



Bekijk bovenstaande figuur. We weten dat EF horizontaal loopt, en GF verticaal. Dus is EG de middellijn van de cirkel met middelpunt H die door E, G en F gaat (omgekeerde stelling van Thales). Hieruit kunnen we concluderen dat EG een rechte lijn is, en dus EH en EG evenwijdig zijn.

De truc is nu om deze evenwijdigheid “door te zetten” naar AD en DC. Dit doorzetten doen we door handig lijnstukken te tekenen tussen de middelpunten van de cirkels. Alle groene lijnstukken in de figuur op de volgende pagina zijn even lang (tweemaal de straal van de identieke cirkels). Dus alle vierhoeken die zijn ontstaan door deze lijnen, zijn parallellogrammen. Uit deze parallellogrammen blijkt dat EH evenwijdig is aan IJ, en dus aan AD. Op dezelfde manier blijkt dat HG evenwijdig is aan DC. Uit de evenwijdigheid van EH en HG, kunnen we nu concluderen dat ook AD en DC evenwijdig zijn.

Opgave 2 - Uitwerking

Laten we om te beginnen de leerlingen die voor de deur staan nummeren: de eerste leerling, Bruut, geven we nummer 1, de volgende nummer 2, etc. Vervolgens geven we de plaats die aan leerling k toegewezen is door de mentor ook een nummer: k. Dit betekent dus dat leerling 1 op plaats 1 hoort te zitten, leerling 2 op plaats 2, etc.

Aangezien Bruut absoluut niet op zijn eigen plaats wil zitten, zal hij een van de andere plaatsen kiezen met gelijke kans. Als Bruut plaats 40 kiest kan leerling 40 nooit op deze plaats komen te zitten. Laten we er dus even van uitgaan dat Bruut niet op plaats 40 gaat zitten. De kans dat dit gebeurt is 38/39. Ervan uitgaande dat Bruut niet op zijn eigen plaats en niet op plaats 40 gaat zitten, kijken we wat de andere leerlingen gaan doen.

Stel dat Bruut op plaats n gaat zitten, de plaats waar leerling n hoort te zitten. De eerst volgende $n-2$ leerlingen die na Bruut binnen komen kunnen gewoon op hun eigen plaats gaan zitten, maar leerling n moet willekeurig kiezen uit de vrije plaatsen. Er zijn twee mogelijkheden voor deze leerling: óf hij gaat op plaats 1 zitten, waardoor iedereen inclusief leerling 40 vervolgens weer op zijn eigen plaats kan zitten, óf hij gaat op een andere stoel zitten met een hoger nummer (zeg stoel j). Opnieuw zullen alle leerlingen tot en met leerling $j-1$ weer op hun eigen stoel kunnen gaan zitten. Leerling j zal weer willekeurig een stoel moeten kiezen uit de overgebleven lege plekken.

Dit proces kan heel lang door gaan, en heeft maar twee manieren waarop het kan eindigen:

- Iemand die zijn stoel bezet vindt gaat op stoel 1 zitten;
- Iemand die zijn stoel bezet vindt gaat op stoel 40 zitten.

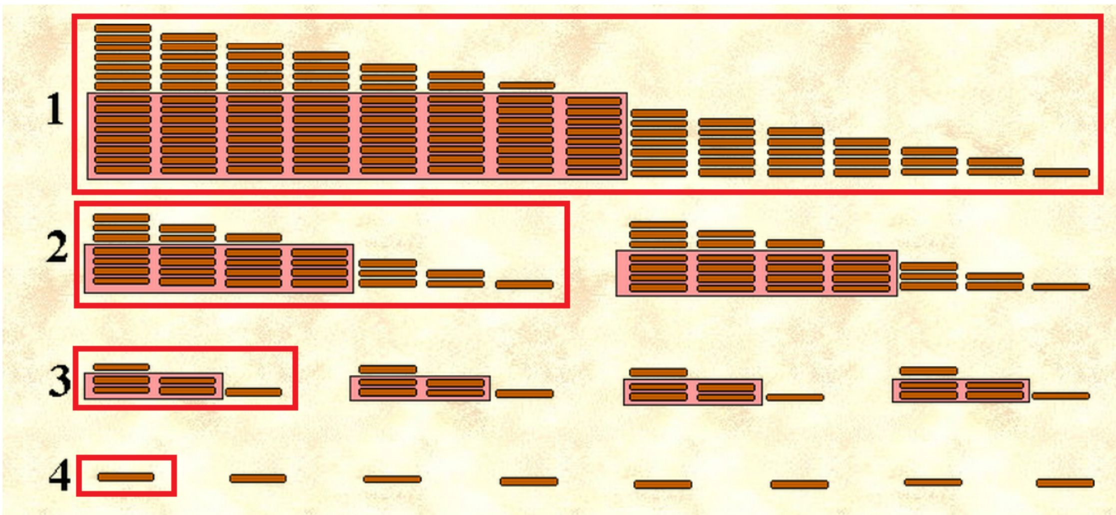
In het eerste geval zullen alle overige leerlingen inclusief leerling 40 op hun eigen stoel gaan zitten, en in het tweede geval zal leerling 40 op stoel 1 moeten gaan zitten.

Je zou kunnen zeggen dat we eigenlijk helemaal niet geïnteresseerd zijn in waar iedereen gaat zitten, alleen wél als er iemand op stoel 1 of stoel 40 gaat zitten. Aangezien elke leerling die willekeurig ergens gaat zitten precies evenveel kans heeft om stoel 1 te kiezen als om stoel 40 te kiezen, is er een 50% kans dat er iemand op stoel 1 gaat zitten voordat er iemand op stoel 40 gaat zitten.

De kans dat leerling 40 op zijn eigen stoel kan gaan zitten is dus 50%, mits Bruut niet op die stoel gaat zitten. Dit is een multiplicatieve kans, dus het antwoord op de vraag is $38/39 \cdot 0.5 = 0.4872$.

Opgave 3 - Uitwerking

Door in de eerste ronde de 8 grootste scholen te laten mee doen, krijg je in de tweede ronde twee identieke groepen bestaande uit 7 scholen (één school is al uitgespeeld, namelijk de school die 8 leerlingen gestuurd heeft). In de volgende rondes pas je op elk van deze identieke groepen dezelfde tactiek toe als in de eerste ronde. In de onderstaande afbeelding illustreren we hoe de organisator op deze manier de hardloopwedstrijd binnen 4 rondes kan organiseren.



In het algemeen kunnen we volgens dit principe in elke ronde het probleem voor n scholen reduceren tot het probleem voor $\frac{n}{2}$ scholen als n even is, en naar $\frac{n+1}{2}$ scholen als n oneven is. De rode kaders in de afbeelding geven dit aan. Dit is de maximale reductie die we per ronde kunnen doen, dus de organisator kan de wedstrijd op zijn minst met 4 rondes voltooien!

Opgave 4 - Uitwerking

In de opgave staat dat voordat Joris kannen water in het vat gooide, de verhouding ice tea:water gelijk was aan 1:5. Dit komt neer op 2 liter ice tea, en 10 liter water.

Noem de inhoud van de kan x. Als de verhouding ice tea:water gelijk aan 1:5 is, zal dus een zesde deel van de hoeveelheid in de kan ice tea zijn: $x/6$. Nadat Joris de eerste kan uit het vat heeft getapt zal er dus nog $2 - \frac{x}{6}$ liter ice tea in het vat aanwezig zijn. Na het bijvullen met water komt dit neer op een fractie $\frac{2-\frac{x}{6}}{12}$ aan ice tea.

De tweede kan die Joris tapt zal nu dus $x \cdot \left(\frac{2-\frac{x}{6}}{12}\right)$ liter ice tea bevatten. Na het tappen zal er nog $2 - \frac{x}{6} - x \cdot \left(\frac{2-\frac{x}{6}}{12}\right)$ liter ice tea in het vat zitten.

Aangezien na de tweede keer tappen en vervolgens weer aanvullen met water de verhouding ice tea:water 1:11 is, krijgen we de volgende vergelijking in x:

$$2 - \frac{x}{6} - x \cdot \left(\frac{2 - \frac{x}{6}}{12}\right) = 1.$$

Oplossen voor x geeft $x = 12 \pm 6\sqrt{2}$. Gezien de grote van het vat (12 liter), is alleen de oplossing $x = 12 - 6\sqrt{2}$ valide.

De kan heeft dus een inhoud van $12 - 6\sqrt{2} \ \approx 3.51$ liter.

Opgave 5 - Uitwerking

Noem de snelheid waarmee de loopband beweegt v km/minuut, en laat x de lengte van de loopband zijn in kilometers. Herinner dat Anke zelf met een snelheid van c loopt. De eenheden van c zijn niet gegeven, maar we mogen aannemen dat ze met een constante snelheid k km/minuut loopt. Dan geldt voor het stuk waarin Anke naar de incheckbalie toebeweegt:

$$x = 2(k - v) \tag{1}$$

Waar we de natuurkundige formule afstand = snelheid × tijd hebben gebruikt. Op dezelfde manier geldt voor het tweede stuk, waarin Anke vanaf de incheckbalie weer teruggaat naar de groep:

$$x = k + v \tag{2}$$

Dus geldt

$$2(k - v) = x = k + v$$
$$2(k - v) = k + v$$
$$k = 3v$$

We hebben nu de verhouding tussen de snelheid v van de loopband, en de loopsnelheid k van Anke gevonden!

We zijn er bijna. Vanaf het moment dat Anke haar bril laat vallen, reist ze gedurende 1 minuut met een snelheid $k + v = 4v$ richting haar groep. De bril reist dezelfde afstand met een snelheid van v richting de groep. Dit is dus 4 keer zo traag, waardoor de bril in totaal 4 minuten nodig zal hebben om bij de groep te komen.

Nadat Anke bij de groep is aangekomen, zal ze dus nog (4-1) = 3 minuten op haar bril moeten wachten

Opgave 6 - Uitwerking

Laten we allereerst een overzicht maken van de eisen die door de begeleider van de Masterclass gesteld worden.

De begeleider wil een functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, die voldoet aan de volgende eisen:

1. $a, b, c \in \mathbb{Z}$;
2. Voor de nulpunten x_i moet gelden $x_i \in \mathbb{Z}$;
3. $f(0) = 0$;
4. $f(20) = 400$.

Uit de derde eis volgt $c = 0$. Dit reduceert de vraag tot het vinden van een functie $f(x) = ax^2 + bx$ die voldoet aan de voorwaarden.

Vanuit de vierde eis kunnen we het volgende afleiden:

$$f(20) = 400 \;\Leftrightarrow\; 400a + 20b = 400 \Rightarrow b = 20 - 20a. \tag{1}$$

We gaan nu verder met de nulpunten:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax^2 + bx = 0 \;\Leftrightarrow\; ax(x + b/a) = 0.$$

Niet-triviale oplossingen van deze vergelijking geven

$$x + b/a = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -b/a \;\xRightarrow{\text{Eis 2}}\; b/a \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Combineren van (1) en (2) geeft

$$\frac{b}{a} = \frac{20 - 20a}{a} = 20/a - 20 \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 20/a \in \mathbb{Z},$$

ofwel

$$a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}.$$

We zien nu dat de oplossingen slechts afhangen van de keuze van a:

$$b = 20 - 20a\ ,\ x_1 = -b/a.$$

a	b	Nulpunt
1	0	0
2	-20	10
4	-60	15
5	-80	16
10	-180	18
20	-380	19
-1	40	40
-2	60	30
-4	100	25
-5	120	24
-10	220	22
-20	420	21

Opgave 7 - Uitwerking

Beschouw de functie S(x), met S de gemiddelde snelheid in m/s over het stuk van x tot $x+10$, op de lijn AB. Dan is S(x) een continue functie (dus een kromme waar geen gaten of rare sprongen in zitten), want het versnellen of vertragen van Joep tijdens het ijsberen, gebeurt vloeiend. x varieert van 0 tot 10.

Teken nu de grafiek van S en ook de lijn $y = 0.2$. Als de grafiek van S de lijn $y = 0.2$ ergens snijdt, dan betekent dat er een x bestaat, waarvoor Joeps gemiddelde snelheid over het interval $[x, x + 10]$, 0.2 m/s was. Dus in totaal heeft hij over die 10 meter dan $\frac{10}{0.2} = 50$ seconden gedaan.

Hoe de grafiek van S er precies uit ziet, weten we niet, maar hij kan niet helemaal boven die van $y = 0.2$ liggen, want dan zou de gemiddelde snelheid over het totale stuk meer dan 0.2 zijn. Maar helemaal eronder kan ook niet; dan zou de gemiddelde snelheid van Joep minder dan 0.2 zijn. De grafiek van S ligt dus deels boven en deels onder de lijn $y = 0.2$. Maar omdat S continu is, moet de grafiek van S de lijn $y = 0.2$ dan ergens snijden. Dat snijpunt s geeft een stuk van s tot $s + 10$ (en dus 10 meter) aan waarover Joep precies 50 seconden gedaan heeft!

Opgave 8 - Uitwerking

Voor het gemak delen we eerst de kring op in groepjes van drie. Per groepje zegt één van de drie A, één van de drie B, en één van de drie C. Als we stellen dat er in het begin 3^n leerlingen in de kring zitten, zitten er na de eerste ronde 3^{n-1} in de kring. Twee van de drie leerlingen per groepje zeggen namelijk B en C, en zullen dus de kring moeten verlaten. Er blijft per groepje maar één leerling over, dus het aantal leerlingen in de volgende ronde is gelijk aan het aantal groepjes in de eerste ronde. We stelden dat er 3^n leerlingen in de kring zaten in het begin. Dit komt neer op 3^{n-1} groepjes. Na de eerste ronde blijven er dus nog 3^{n-1} leerlingen over. Aangezien de laatste leerling in de eerste rond C zei (het zijn allemaal gehele groepjes), zal leerling 1 opnieuw beginnen met het zeggen van A en mag dus blijven zitten. Leerling 1 zal in het bijzonder altijd A blijven zeggen, omdat de groepjes volledig blijven doordat we met machten van drie werken; leerling 1 mag altijd blijven zitten! Dit proces gaat dus door tot iedereen behalve leerling 1 weg is.

Nu is het jammer genoeg niet het geval dat 251 geschreven kan worden als een macht van drie. We kunnen echter wel kijken of we het geval waarbij er 251 leerlingen in de kring zitten kunnen reduceren tot een geval waarbij het aantal wèl geschreven kan worden als macht van drie. We kunnen dan vervolgens bovenstaande techniek toepassen en concluderen dat in dit geval de leerling die begint met het zeggen van 1 altijd over zal blijven.

Aangezien $3^5 = 243 < 251 < 3^6 = 729$, kunnen we het geval waarbij 251 leerlingen in de kring zitten reduceren tot het bovenstaande makkelijke geval wanneer er 3^5 leerlingen over zijn. Hiertoe moeten er eerst $251 - 243 = 8 = 4 \cdot 2$ leerlingen uit de kring gaan. Omdat uit elke groep twee leerlingen worden verwijderd, corresponderen deze acht leerlingen met vier groepen van drie leerlingen. Er zijn dus $4 \cdot 3 = 12$ leerlingen voor de leerling die altijd mag blijven zitten. Kortom, leerling 13 blijft over.

Ter vergelijking kunnen we dezelfde methode gebruiken voor het voorbeeld in de opgave. Omdat geldt $3^2 = 9 < 11 < 3^3 = 27$, moeten we toewerken naar het geval dat er 9 leerlingen in de kring zitten. Hiertoe moeten er eerst $11 - 9 = 2 = 2 \cdot 1$ leerlingen uit de kring worden verwijderd. Dit correspondeert met 1 groep. Er zijn dus 3 leerlingen voor de leerling die altijd mag blijven zitten, kortom leerling 4 mag altijd blijven zitten en blijft dus over!

Opgave 9 - Uitwerking

Patrick en Issam spreken het volgende af:

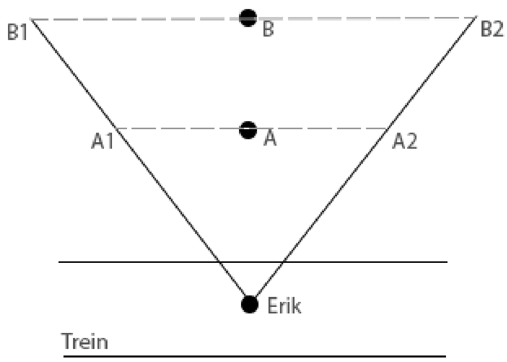
Patrick opent beker 1. Als hij een blauw balletje ziet is hij klaar, als hij een rood balletje ziet opent hij bij de tweede poging beker 2, en als hij het groene balletje ziet opent hij bij de tweede poging beker 3.

Issam wijst als eerst beker 3 aan. Als hij een groen balletje ziet is hij klaar, als hij een blauw balletje ziet wijst hij beker 1 aan, en als hij een rood balletje ziet wijst hij beker 2 aan.

Als Patrick het blauwe balletje vindt (kans 2/3), vindt Issam op deze manier zeker het groene balletje. De kans dat ze het **beide** goed hebben, is dus $\frac{2}{3}$!

Opgave 10 - Uitwerking

In deze opgave is niks bekend over de situatie van Erik. We moeten dus veel dingen variabel laten. Om te beginnen moeten we eerst bedenken wat het betekent als een object 'snel langs komt'. Om dit te begrijpen maken we eerst een schets van de situatie.



De twee lijnen vanuit Erik beschrijven zijn gezichtsveld vanuit het punt waar hij in de trein zit. Verder definiëren we de afstand van respectievelijk object B en object A tot Erik als BE en AE. Hierbij geldt BE > AE. Om nu te begrijpen wat het inhoudt als een object snel langs komt kijken we naar de gestippelde lijnen door de objecten die parallel lopen aan de beweegrichting van de trein. Aangezien hier alleen de relatieve snelheden een rol spelen, kunnen we de vraag ook omdraaien, en de objecten A en B laten bewegen in plaats van de trein. De objecten zullen over de stippellijnen bewegen, en Erik neemt de objecten niet meer waar wanneer ze buiten zijn gezichtsveld komen. De snelheid die Erik waarneemt, heeft dus te maken met de afstand die het object aflegt in zijn gezichtsveld. Het enige dat Erik namelijk ziet is hoe snel de objecten vanuit zijn oogpunt door zijn gezichtsveld bewegen. We hebben nu een redelijk beeld hoe we het kunnen bewijzen, maar het moet nog wel netjes opgeschreven worden.

Stel de trein beweegt met snelheid v m/s. We kunnen het probleem dan omdraaien door te zeggen dat de objecten A en B bewegen met snelheid v m/s in tegengestelde richting van de trein. Aangezien de driehoeken A-Erik-A2 en B-Erik-B2 gelijkvormig zijn, en AE < BE moet gelden dat A-A2 < B-B2. Op precies dezelfde manier volgt dat A-A1 < B-B1, en dus A1-A2 < B1 - B2. We bekijken nu hoe het object A door het gezichtsveld beweegt. Als de snelheid gelijk aan v is, zal het object $(A1 - A2)/v$ seconden in het gezichtsveld zijn. Object B blijft echter wel $(B1 - B2)/v$ seconden in het gezichtsveld van Erik. Aangezien (B1-B2) > (A1-A2) geldt

$$\frac{B1 - B2}{v} > \frac{A1 - A2}{v}, \tag{1}$$

en zal object B dus langer in het gezichtsveld blijven dan object A. Echter, voor Erik lijkt het alsof object B evenveel afstand aflegt als object A, en neemt Erik