



Ervaringen met Profielwerkstukken

Sven Aerts

Docent wiskunde 4^e gymnasium

Wiskunde?

- It has become customary to view mathematical research as establishing truth by rigorous deduction from appropriately chosen axioms and definitions. (Wikipedia)
- Mathematics is about making up rules and seeing what happens. (Victoria Hart)

Een voorbeeld

1.1 Newton's Law of Gravitation

Planets orbit the sun under influence of the Sun's gravitation. The gravitation force is described by the following equation, which was discovered by Newton in 1687:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

Where \mathbf{F} is the force on the planet, M is the mass of the Sun, m is the mass of the planet and \mathbf{r} is the distance between the Sun and the planet. We will assume that m is negligible compared to M , although the proof can easily be extended to include a non-negligible mass m . Equally important is Newton's second law:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.2)$$

En daarmee bewijs je dat...

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - \frac{km}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} + \frac{km(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= \mathbf{F} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{p} \times \mathbf{0} - \frac{km}{|\mathbf{r}|} \mathbf{v} + \frac{km(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{r} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p} - \frac{k}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= \left(-\frac{k}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right) \mathbf{r} - \left(-\frac{k}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\right) \mathbf{p} - \frac{k}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= -\frac{k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} + \left(\frac{k}{|\mathbf{r}|^3} |\mathbf{r}|^2\right) \mathbf{p} - \frac{k}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= -\frac{k}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} + \frac{k}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1.10}$$

PWS in zuivere wiskunde

- Voorkennis
- Moeilijkheidsgraad
- Originaliteit

Andere insteek

- The science of indirect measurement

Auguste Comte (1851)

- The science of structure, order, and relation that has evolved from elemental practices of counting, measuring, and describing the shapes of objects.

Encyclopaedia Britannica

Leerlingen komen met een voorstel...

“We willen de invloed van de trap op de curve van de baan van een voetbal bestuderen door de bewegingsvergelijkingen van Newton op te lossen.”

Q1: wat doe je met dit voorstel?

“We willen de invloed van de trap op de curve van de baan van een voetbal bestuderen door de bewegingsvergelijkingen van Newton op te lossen.”

Bend it like Beckham: Een wiskundig onderzoek naar het verband tussen rotatie, snelheid en curve van een voetbal.

Thijs van Egmond en Tjip Bischoff

Disciplines: Voetbal, Informatica, ~~Natuurkunde~~

Wiskunde: Vectormeetkunde, Lineaire algebra, Polynomiale regressie

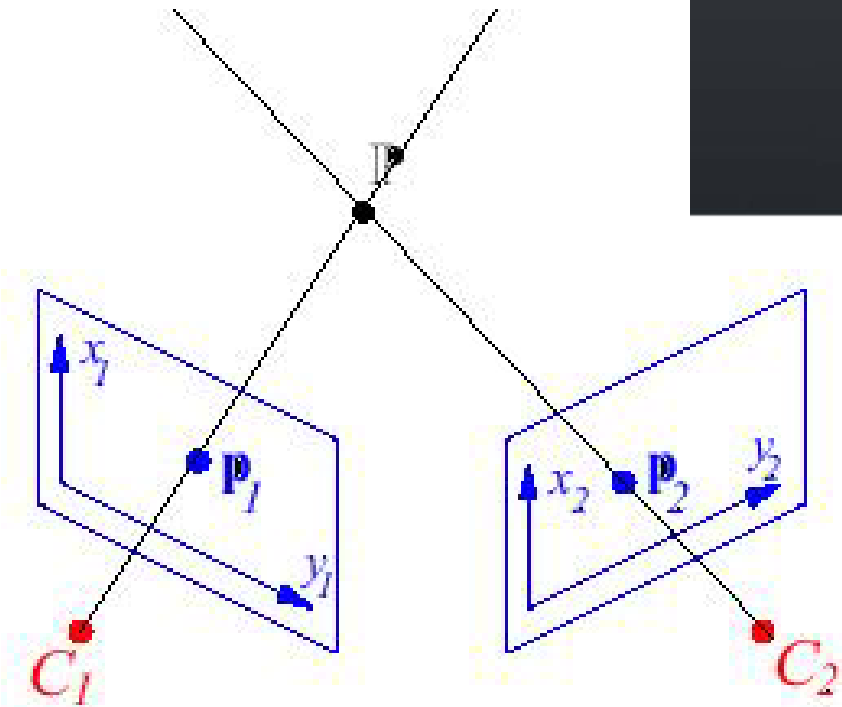
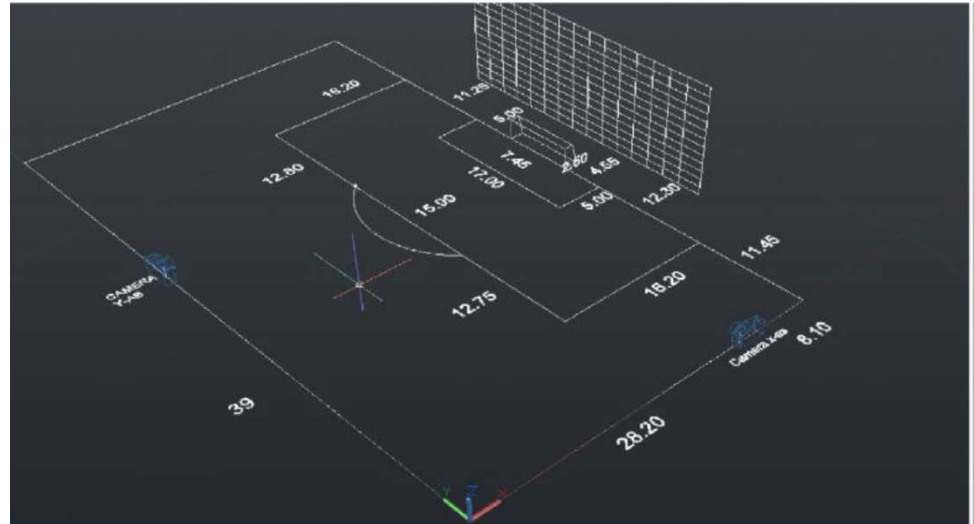
De opstelling



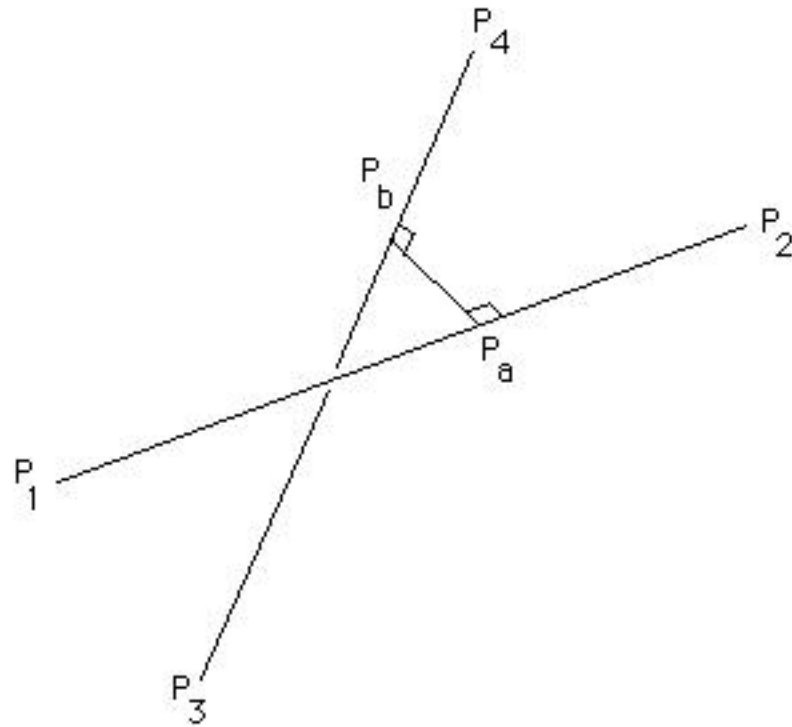
Van beelden naar coördinaten



3D als 2D + 2D



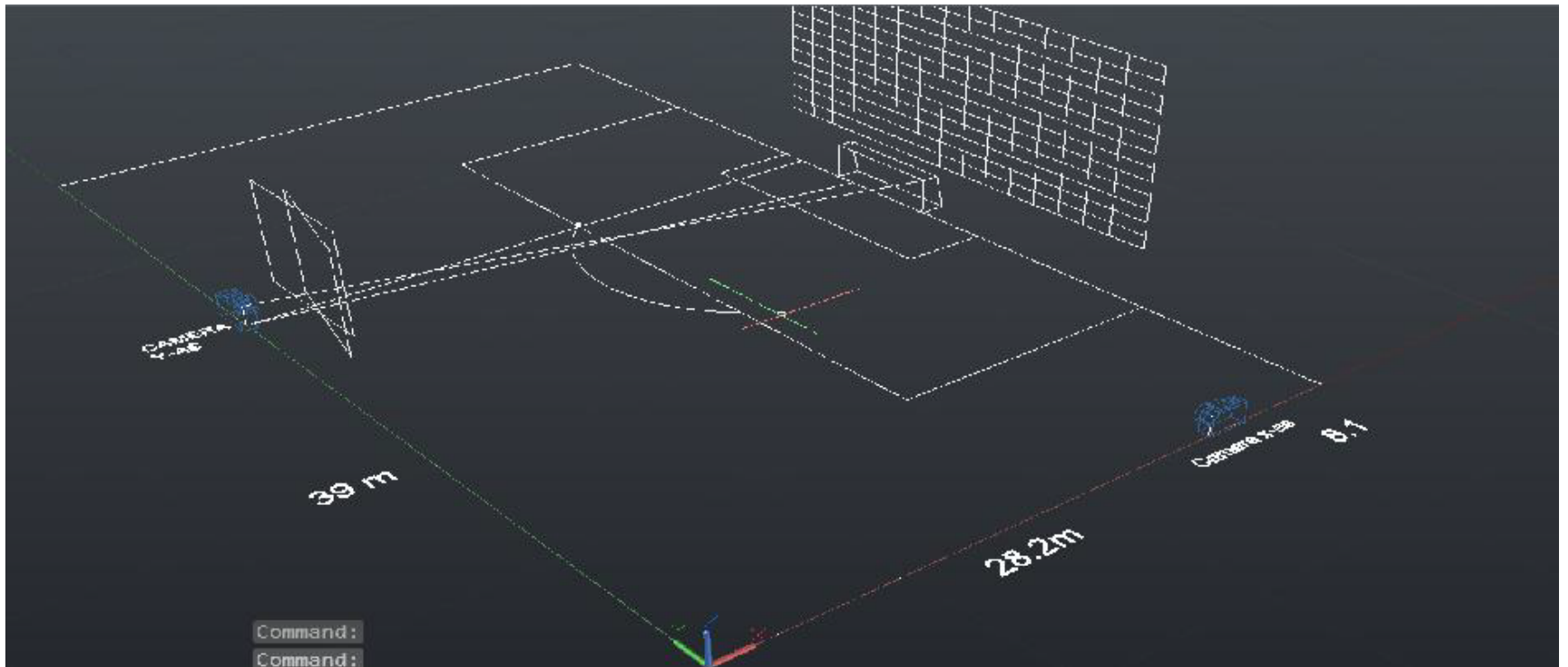
Analytische oplossing voor een operationeel probleem



Reconstructie van de 3D baan

1. Meetopstelling en schieten (filmpjes en ballen)
2. Coördinaten in pixels van de camera beelden:
Adobe after effects
3. Opstellen van vectorvergelijkingen van de rechte in “echte coördinaten” (Excel)
4. Bepalen van de punten met kleinste afstand tot de twee rechten (analytisch)
5. Interpolatie van best passende curve: *MatLab*
6. Studie correlatie, rotatie snelheid, curve,..

Een probleem...



Q2: Wat doe je met dit
probleem?

Rol van wiskunde in een PWS

- Exacte zuivere wiskunde?
- Geschiedenis (Eeuwige Kennis)
- Didactisch (WisD module)
- Grondslagen en filosofie (EPR paradox)
- Wiskunde als inspiratiebron (Escher)
- Wiskunde als “modelleer tool” (Bend it like Beckham)
- Wiskunde voor data acquisitie (Vliegende Hollander)
- Wiskunde voor statistisch testen van hypothesen

Profielwerkstukken

De EPR paradox: Wat zegt de quantum mechanica over ons beeld van de werkelijkheid?

Thomas Burger

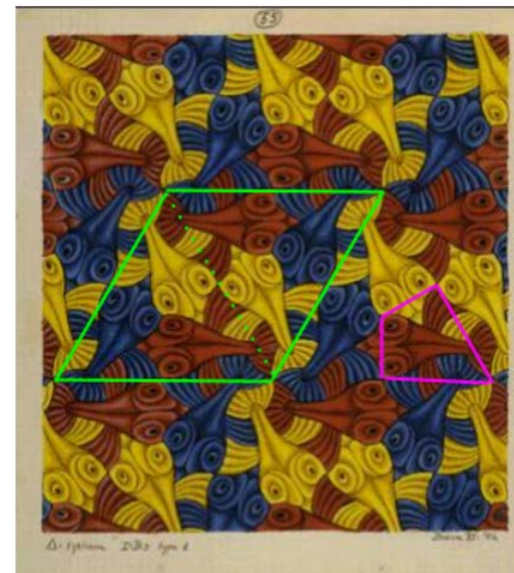
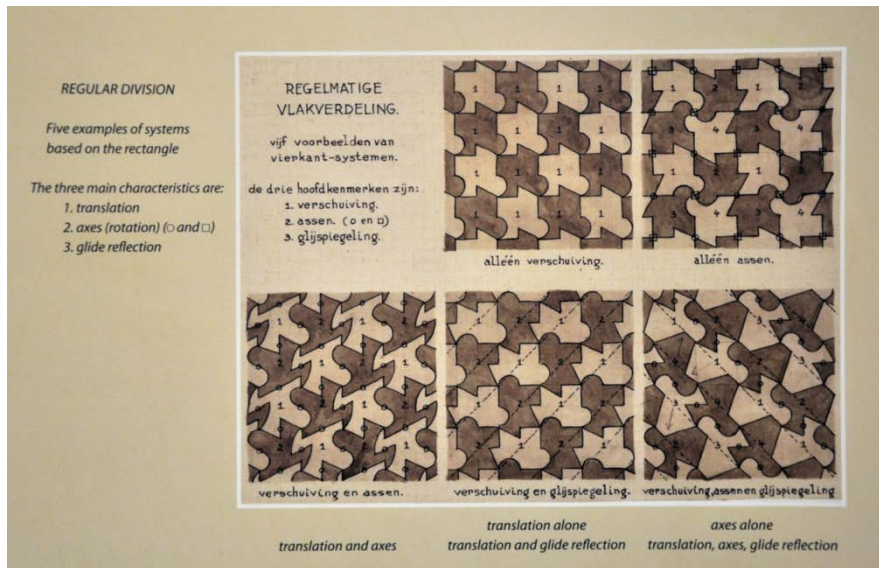
Disciplines: Filosofie, Natuurkunde

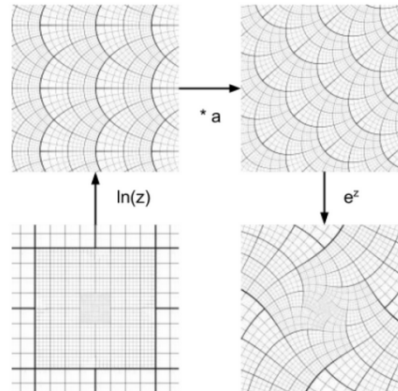
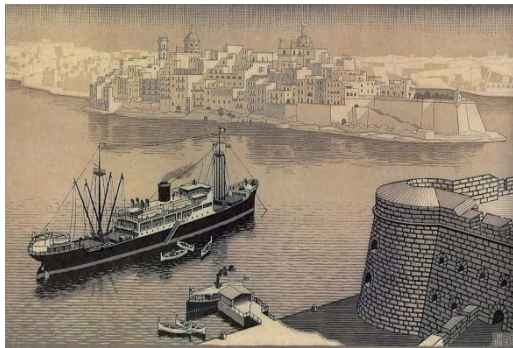
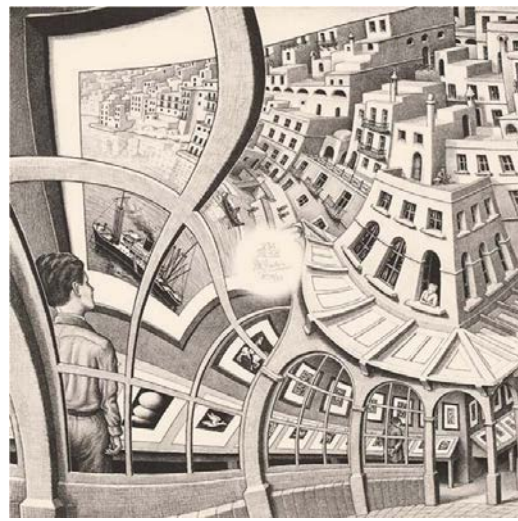
Wiskunde: Ongelijkheden, Waarschijnlijkheidsmodellen

Wiskunde als inspiratie

De Wiskunde van Escher

Savanne Harrewijen





Disciplines: Vrije grafiek (anamorfie, paradoxale perspectieven, vlakvulling,...)

Wiskunde: Symmetrieën in het vlak, Tesselaties, Complexe afbeeldingen (holomorfe functies)

Hoe *spreken* we over wiskunde?

Eeuwige Kennis: Een onderzoek naar de verbanden tussen de Griekse en moderne wiskunde.

Darek Mercks en Tijn de Vos

1. Taalgebruik in bewijzen bij de Grieken en in moderne wiskunde
2. Gebruik van variatieprincipes in natuurkunde
3. Evolutie van logica en modern gebruik van logica in bewijsvoering

Disciplines: Klassieke talen, Moderne talen,
Geschiedenis

Wiskunde: Logica, Bewijsvoering,
Variatierекening, Vlakke Meetkunde

De grenzen van zuivere wiskunde

Stable configurations of Planetary Systems.

Muriel van der Laan

Disciplines: Astronomie, Programmeren

Wiskunde: Chaostheorie, Numerische integratie (leap-frog), coördinaat transformaties, Monte Carlo (Markov) voor bepalen laagste Lyapunov exponent

Q: Ambitieuze plannen!

- Ik wil een boot maken die met gebruik van een boordcomputer, elektronisch kompas, gps en radar zelf van A naar B kan. Liefst met satelliet telefoon.
- Ik wil een bril maken zoals Google glasses, maar dan bedienbaar met bewegingen van je ogen door eye-tracking en voor de helft van de prijs die een Google-glasses kost.

Wiskunde in actie

De Vliegende Hollander: Een zelfstandig varende robot-zeilboot

Willem Melching

Disciplines: Zeiltheorie, Modelbouw,
Programmeren

Wiskunde: Signaal-analyse, Navigatie,
Regeltechniek

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Nut	3
3	Zeilen	4
3.1	De voornaamste onderdelen	4
3.1.1	De zeilen	4
3.1.2	Schoten	4
3.1.3	Mast	5
3.1.4	Zwaard, kiel en roer	5
3.2	De windrichtingen	6
3.2.1	Voor de wind	6
3.2.2	Ruime wind	6
3.2.3	Halve wind	8
3.2.4	Aan de wind	8
3.2.5	In de wind & opkruisen	9
4	Automatisering en de kernbegrippen van het robotzeilen	10
4.1	Regeltechniek - de PID	11
4.2	PID regeling	12
4.2.1	P deel	13
4.2.2	I deel	13
4.2.3	D deel	14
4.2.4	Combineren	14
4.3	Polar	16
4.4	Grootcirkel en loxodroom	17

5	Robotzeilen: hardware en software	18
5.1	De boordcomputer: multitasking en efficiëntie	18
5.2	PID regeling	18
5.3	Loxodroom	20
5.4	Kompas: de koersbepaling	21
5.5	GPS: de positiebepaling	22
5.6	Servo's aansturen: het roer en de zeilen	23
5.7	Communicatie tussen de laptop en de boordcomputer: Sailcom	23
5.8	PC Interface	23
5.8.1	Hoofdvenster	24
5.8.2	Roer & zeil	25
5.8.3	Kompas & vaantje	26
5.8.4	PID	27
5.8.5	Route	28
6	Route plannen	29
6.1	Opkruisen	29
6.1.1	Wat is opkruisen?	29
6.1.2	Algoritme van Stelzer en Pröll	30
6.1.3	Mijn algoritme	31

7	Hardware: sensoren en actuatoren	34
7.1	Boot	34
7.1.1	Vorige pogingen	34
7.1.2	Micromagic	34
7.2	Sensoren	36
7.2.1	GPS	36
7.2.2	Kompas	36
7.2.3	Vaantje	36
7.3	Actuatoren	38
7.3.1	Servo	38
7.4	Elektronica	39
7.4.1	ARM microcontroller	39
7.4.2	Draadloze communicatie met de wal	39
8	Resultaten en evaluatie	40
8.1	Algemene indruk	40
8.2	Hardware	40
8.3	PID regelaar	41
8.4	Route plannen	42
9	Discussie	44
10	Conclusie	45

Andere pws in wiskunde

- *Kunstmatig Leven en Kunstmatige Neurale Netwerken* (Tim Trussner, Begl. Gert Jan Dekker)
- *The Midas Formule* (Gijs de Bruin en Emiel Hoefkens, begl. Wilma Nagelkerke)
- *Wiskunde, de achtste discipline van de heptatlon* (Hanna Knotnerus en Carine Candel, begl. Fred Pach)
- **Stable Planetary Configurations** (Muriel van der Laan)

Rol van de begeleider

1. Meehelpen formuleren van (tussen) doelstelling(en)
2. Publicaties en contacten
3. Brainstormen over successen en tegenvallers
4. Correctie van voorlopige eindversie

-> De vorm van begeleiding is afhankelijk van de leerling- hun sterke en zwakkere punten (en die van begeleider!)