



08

09

**KWADRANTMAGAZINE  
NOVEMBER 2008**



**Universiteit Twente**  
*de ondernemende universiteit*

---

# Inhoudsopgave

Voorwoord	3
Studiegroep Wiskunde in de Industrie	4
Wiskunde en coöperatieve spellen	9
Doe toch normaal!	11
Hoe een maatschappelijk probleem kan leiden tot een Wiskundige Bacheloropdracht	13
Toegepaste Wiskunde? Maar wat is daar toegepast aan dan?	13
Buiten adem - Over complexiteit en adaptief vermogen -	14
Betere zorg voor dezelfde prijs?	17
De kredietcrisis wiskundig bekeken	19
Studenten aan het woord	21
De keuze voor een Master Financial Engineering	21
Stageverslag: Visuele Overweg Monitoring (VOM)	22
PYTHAGORAS	24
Stemmingen	24
Geluidsbelasting rond Schiphol	30







## Voorwoord

Begin 2008 was TW gastheer van de Studiegroep Wiskunde in de Industrie. In dit nummer van Kwadrant vindt u een uitgebreid verslag van deze week. De problemen die er behandeld werden kwamen rechtstreeks uit de praktijk en boden de wiskundigen een uitstekende kans om te zien wat hun geavanceerde kennis in de praktijk nu eigenlijk kan betekenen. Onze opleidingen Technische Wiskunde (BSc) en Applied Mathematics (MSc) leiden toegepast wiskundigen op. Wiskundigen die hun diepgaande wiskundige kennis aanwenden om maatschappelijk relevante problemen mee te helpen analyseren en oplossen. De Studiegroep Wiskunde in de Industrie is een platform waar professionele wiskundigen hun tanden mogen stukbijten op de problemen die de industrie hun heeft aangereikt. In de opleiding proberen we studenten voor te bereiden op het werk als toegepast wiskundige.

Dit aspect van de studie komt in de bachelorfase tot uiting in de modelleerlijn die uitmondt in de bacheloropdracht. Je zou kunnen zeggen dat de bacheloropdracht een soort Wiskunde in de Industrie in het klein is. Verderop in dit nummer treft u een uitgebreid artikel over enkele bacheloropdrachten. De onderwerpen die in bacheloropdrachten behandeld worden zijn ook ontleend aan de praktijk en er wordt ook in groepjes aan gewerkt. Er zijn natuurlijk behalve overeenkomsten met Wiskunde in de Industrie ook verschillen. De uitvoerders zijn studenten, de bestudering van de problemen vindt niet binnen één week plaats maar is verspreid over twee kwartielen, maar in essentie gaat het om hetzelfde.

Het moge duidelijk zijn, de opleidingen bij Toegepaste Wiskunde zijn gericht op het mee helpen oplossen van praktische problemen middels een wiskundige aanpak. Bij het inrichten van het curriculum laten we ons dan ook voor een groot deel leiden door dat perspectief. Om ook op de langere termijn ons curriculum actueel en relevant te houden is intensief contact met de buitenwereld van groot belang. Eén van de manieren om dat te doen is via onze eigen afgestudeerden. Zij zijn goed op de hoogte van wat er in de praktijk speelt, maar bovendien zijn ze ervaringsdeskundigen in de zin dat ze precies weten wat de opleidingen bij Toegepaste Wiskunde inhouden. Contact met alumni staat dus bij TW hoog in het vaandel. Een belangrijk onderdeel daarin is natuurlijk Kwadrant-magazine. Het podium bij uitstek waar TW en TW-alumni over elkaar geïnformeerd blijven. Naast de reeds genoemde onderwerpen staan in dit nummer nog tal van andere interessante artikelen. Ik wens alle TW alumni veel leesplezier tijdens de decemberfeestdagen.

Jan Willem Polderman  
Opleidingsdirecteur TW





# Studiegroep Wiskunde in de Industrie

Van 28 januari t/m 1 februari 2008 heeft op de UT de Studygroup Mathematics with Industry 2008 plaatsgevonden. De organisatie was dit jaar in handen van de afdeling Toegepaste Wiskunde: Onno Bokhove, Johann Hurink, Chris Stolk, Michel Vellekoop, Mariëlle Slotboom en Dini Heres hebben deze taak met succes volbracht. Zij leggen zelf uit wat hen bezielt heeft deze SWI te organiseren.

Diana Dalenoord

**Waarom wordt deze week elk jaar georganiseerd?**

Johann:

Dat wij de studieweek organiseren heeft twee belangrijke redenen. Ten eerste is het leuk om een keer een week los van het normale werk met een groep collega's in een echt praktisch probleem te duiken en te zien hoe ver men komt. Maar aan de andere kant willen wij als wiskundigen met deze week ook laten zien dat met wiskunde iets te bereiken is - niet alleen publicaties maar heel praktische resultaten. Het gaat dus ook om 'marketing'. Wij willen met de studieweek een bijdrage leveren aan de verbetering van het imago van de wiskunde.

Dit zijn redenen om de studieweek te organiseren. De redenen om het ieder jaar te doen - met wisselende locaties in Nederland? Ten eerste, gaat het niet met een studiegroep om de net genoemde imagoverbetering te bereiken. Men moet hier een lange adem hebben en dit ook als een onderdeel van veel 'PR acties' voor de wiskunde zien. Ten tweede, geeft de studiegroep ons telkens weer de mogelijkheid contacten met het bedrijfsleven op te bouwen. En als laatste, willen wij natuurlijk iedere generatie van jonge AIO's de kans geven om dit unieke event mee te maken.



**Zijn er significante resultaten behaald voor bepaalde opdrachtgevers?**

Johann:

Zeker, ook al is het moeilijk te zeggen hoe 'significant'. Dit zal de komende tijd moeten blijken.

De reacties van alle bedrijven t.a.v. de gepresenteerde resultaten op de laatste dag van de studieweek was erg positief. Bedrijven gaven ook al direct aan, dat zij met de behaalde resultaten verder wilden gaan.

Ik zelf heb mij de opdracht van de NS bezig gehouden. Voor dit probleem is er al overleg met de contactpersoon bij de NS geweest, om het onderzoek middels een of twee afstudeerprojecten verder uit te diepen. Het doel is om de tijdens de studieweek ontwikkelde basisideeën tot een volledig werkende algoritme te brengen en dit algoritme in te zetten binnen de NS.

**De media zal ook een belangrijke rol hierbij gespeeld hebben. Kun je aangeven welke media contact gezocht hebben met de organisatie en hoe ging dit?**

Johann:

Hier kom je weer terug tot de vraag waarom wij deze week organiseren.

En gezien mijn antwoord op die vraag is het duidelijk dat wij het tweede doel niet kunnen bereiken zonder de media. Wij willen graag dat veel mensen horen en lezen, dat wiskunde iets is waar je verder mee kunt komen. Dit is ook een van de belangrijke doelstellingen van de twee hoofdsponsors van deze week, STW en NWO. Wij hebben dus ook al vroegtijdig het 'communicatieteam' van EWI betrokken bij de organisatie. Wiebe van der Veen (en de persoon die ons nu weer zo nodig moet interviewen) hebben samen met ons een persmap in elkaar gezet en deze is dan breed verspreid richting krant- en radio media. Dit heeft er toe geleid dat er in het Financieel Dagblad, het Technisch Weekblad, de Tubantia, het UT-nieuws en op SYNC.nl artikelen over de studiegroep verschenen zijn en dat in 3 radioprogramma's (Radio 5, RTV Oost, en BNR radio) de studiegroep aan bod kwam. Daar zijn we wel erg trots op. Immers, wie deze artikelen nog een keer wil zien of de radio programma's wil luisteren, kan deze onder het 'Press' knopje op de website van de studiegroep vinden ([www.math.utwente.nl/swi2008](http://www.math.utwente.nl/swi2008)).

**Welke bedrijven en hun bijbehorende opdrachten zijn aan de orde geweest tijdens de SWI-week?**

Chris:

Er waren zes problemen. Deze waren afkomstig van het Waterschap Regge en Dinkel, Thales, de NS, NXP Semiconductors (vroeger een onderdeel van Philips), Philips Research samen met het AMC (academisch ziekenhuis van de UvA) en van Hoogovens. Het Waterschap had een vraag over de afvoer van



regenwater tijdens periodes van zware regenval. De vraag was hoe ze het zo konden organiseren dat ze zo min mogelijk land nodig hadden voor waterberging. Thales had een vraag over een beveiligingssysteem met een heleboel kleine microsensoren. Het probleem van de NS ging over het rangeren van treinen, hoe met zo min mogelijk rangeerbewegingen een bepaald resultaat kon worden bereikt. Het probleem van NXP ging over het simuleren van microschemata die op een chip kunnen worden gemaakt. Philips-AMC over het analyseren van metingen aan hersencellen, die met behulp van een naald in de hersenen worden verkregen. Hoogovens ging over het proces van het stollen van aluminiumlegeringen.

### **Hoe zijn jullie aan deze bedrijven gekomen? Is er een link met jullie wetenschappelijk onderzoek op de UT?**

Chris:

De meeste bedrijven zijn geworven via persoonlijke contacten. Zelf heb ik een aantal mensen die ik ken in de wis- en natuurkunde benaderd, bijvoorbeeld mensen die in de wis- of natuurkunde gepromoveerd zijn, en vervolgens in het bedrijfsleven zijn gaan werken. Daaruit is één opdracht gekomen. Toevalig had die niets met mijn eigen onderzoek te maken. Maar andere opdrachten zijn wel duidelijk via onderzoekscontacten bij ons gekomen. Het is een voordeel dat we veel toegepast onderzoek doen bij het werven van opdrachten.

### **Kun je iets meer vertellen over de opdracht die jij geregeld hebt? Is bv de opdracht naar verwachting van de opdrachtgever uitgevoerd?**

Chris:

De door mij geworven opdracht was van NXP. Hun probleem ging over de evenwichtstoestanden van een microschemata, die met een klein elektrisch spanningsveld open en dicht kon worden gedaan. De bedoeling is dat deze schakelaars in de toekomst worden ingebouwd in mobiele telefoons, waar ze worden gebruikt om de stroom afkomstig van de antenne te schakelen, zodat er minder elektronica nodig is voor het ontvangen van signalen van verschillende frequentiebanden. Jiri Stulemeijer van NXP was heel enthousiast over het resultaat. Hij had zelf het probleem al heel goed bestudeerd, maar toch had hij veel geleerd. De NXP groep konden een aantal dingen laten zien over zijn probleem. Bijvoorbeeld over de stabiliteit van de half open toestanden, en hoe je een oplossing van een stelsel vergelijkingen kunt volgen als er een parameter in de vergelijking verandert, in dit geval het spanningsveld.

### **Hoe zijn jullie betrokken bij de organisatie van de SWI ? En hoe was jullie rolverdeling?**

Mariëlle:

Dini en ik zorgden voor de ondersteunende organisatorische werkzaamheden. Dus het regelen van de zalen, hotel, deelnemer registratie etc. Ik deed het begin, en Dini nam het van mij over toen ik met zwangerschapsverlof ging in september vorig jaar.

\* Kunnen jullie aangeven hoeveel gasten er geweest zijn en welk soort gasten dit waren? (waren t bv allemaal AIO's of juist niet, waar kwamen ze zoal vandaan: bedrijven/Univ's, etc)

Dini:

Er waren gemiddeld per dag 75 gasten. De meeste deelnemers waren promovendi maar er waren ook universitaire medewerkers en mensen uit het bedrijfsleven onder de deelnemers. De meeste deelnemers kwamen uit Nederland, maar er waren ook diverse mensen uit het buitenland aanwezig, bijv. uit Polen, België, United Kingdom en Duitsland.

### **Was de organisatie van deze week speciaal of deed het je denken aan de wiskundige congressen die je voor je leerstoel organiseert?**

Mariëlle & Dini:

De organisatie van de SWI is anders dan de congressen die je normaal organiseert omdat je nu samenwerkt met medewerkers uit afkomstig uit alle leerstoelen van TW en dat heb bij de organisatie van congressen die je leerstoel organiseert niet. Dit TW brede aspect maakt het extra leuk om hieraan mee te werken. Het was ook dit keer weer een hele leuke ervaring.

### **Wat houdt de Studiegroep Wiskunde in de Industrie (SWI) in?**

Onno:

De studiegroep is een studieweek. Op maandag presenteren doorgaans zes bedrijven hun wiskundige uitdagingen. Vervolgens kiezen de deelnemende wiskundigen 1 daarvan, en werken de zes projectteams tot vrijdag diep in de nacht aan wiskundige oplossingen van die uitdagingen.

De (deel)oplossingen worden door ieder van de zes teams op de vrijdag van de studieweek gepresenteerd.

De wiskunst is om de gestelde uitdagingen te vertalen naar oplosbare wiskundige problemen.

Dat gebeurt in nauwe interactie met de opdrachtgevers, via wiskundige modelleren, en door de verschillende wiskundige expertises binnen een team in te zetten.

Het is altijd een plezierige week van hard nadenken en samenwerken, wiskundige oplossingen verzinnen en uittesten, en de pers en een breder publiek helder trachten uit te leggen wat we goed aan het doen zijn.



**Hoe is het gekomen dat de organisatie van de SWI dit jaar in Twente zou gebeuren? Is het al eens eerder door de UT georganiseerd?**

Onno:

Vivi Rottschäfer van de Universteit Leiden had mij eind 2006 benaderd met de vraag of Twente weer eens de Studiegroep wilde organiseren. Na de Studiegroep in Twente uit 2000.

Dat wilde ik wel, mits Michel Vellekoop medetrekker zou worden.

Vervolgens is de organisatie uitgebreid met Gjerrit Meinsma, Chris Stolk, Johann Hurink, Dini Heres-Ticheler en Mariëlle Plekenpol. Pieter Oosterhof en jijzelf (Diana), en ook Wiebe van der Veen, gaven daarbij persondersteuning vanuit EWI. Een sterk en leuk team, waaronder vijf actieve, publicerende wetenschappers.

**Wat was jouw taak binnen de organisatie?**

Onno:

Voorzitten en de algehele gang van zaken leiden, het binnenhalen van twee van de zes uitdagingen, en uiteindelijk het begeleiden van de pers tijdens de studieweek, dat laatste weer samen met Michel.

**Binnen de organisatie was jij de man van het internet. Er was ook, zeg maar een 'razende reporter' aanwezig om dagelijkse rapportjes voor internet te schrijven. Wie was dat en waarom juist hij?**

Gjerrit:

Erik Fledderus was tijdens de week onze 'razende reporter'. Hij is een oud TW-student en is inmiddels opgeklommen tot hoogleraar bij de faculteit Elektrotechniek in Eindhoven. Gelukkig is hij zijn interesse in de wiskunde bepaald niet kwijt geraakt. Snuffelen aan de vele verschillende problemen doet hij graag en dat maakt hem tot een ideale reporter. Lees zijn verslagen eens op onze website: <http://www.math.utwente.nl/swi2008> Overigens heeft Frits van Beckum (oud TW-medewerker) ook het nodige gesnuffeld en geschreven.



**Er komen ook nog proceedings van deze week en een 'sociaal verslag'. Kun je hier iets meer over vertellen?**

Gjerrit:

Er komen twee boekjes. Een dun boekje gericht op een algemeen publiek en daarnaast een officiële proceedings met daarin de wiskundige details. Het boekje voor algemeen publiek wordt geschreven door wetenschapsjournalist Bennie Mols. Je zou hem kunnen kennen van krantenartikelen en hij is ook zo nu en dan te gast in het Radio-5 wetenschapsprogramma Hoe?Zo! (dat programma is er elke werkdag!). Een uiterst leesbaar boekje wordt dat (dat weten we uit ervaring). Wij van de organisatie proberen ook de officiële proceedings leesbaar te krijgen maar dat is dan wel 'leesbaar' voor de incrowd. De zes groepen zijn nu druk bezig de artikelen te schrijven en als het een beetje mee zit kunnen we deze zes artikelen voor de zomer bundelen tot een geheel, de zogenaamde "proceedings van de 63ste SWI". Het CWI (CWI=Centrum voor Wiskunde en Informatica) zal de proceedings uitbrengen en we hopen en verwachten dat een deel van de verhalen als basis kan dienen voor verdere samenwerking tussen de bedrijven en de groepen.

**Heb je zelf ook nog actief meegewerkt aan een van de projecten? Welk project was dat en kun je iets over de gang van werken vertellen?**

Gjerrit:

Ik heb zelf half meegewerkt aan het 'naald-in-het-brein-probleem'. Ik moest wel vaak weg om wat dingen te regelen. Het breinprobleem komt er kort gezegd op neer dat we uit een brei aan signalen moeten aangeven welke signaal bij welk type neuron hoort. Die signalen worden namelijk opgepikt door een naald die de chirurg in de hersenen aanbrengt en als wij de chirurg direct kunnen vertellen welke neuron er dichtbij de punt van de naald zit dan weet de chirurg of de naald al op de juiste plek zit. We konden tijdens de week met echte data aan de slag hetgeen als gevolg had dat bijna iedereen al snel met de laptop in de weer was. Dat heeft voor- en nadelen. De een wil dit, de ander wil dat. Dan weer gingen we gezamenlijk op, dan weer ging ieder zijn eigen weg.

Donderdagmiddag leek er toch een soort consensus te ontstaan, en, belangrijk, was er iets waar Philips en AMC denken verder mee te kunnen.

**De SWI werd gesponsord door 2 grote instanties, kun je uitleggen waarom zij juist deze activiteit sponsoren?**

Michel:

NWO en STW zijn de organisaties die een groot deel van het Nederlandse onderzoeksgeld verdelen en zij steunen de studieweek wiskunde en de industrie al jaren. Omdat ze al zo lang nauw betrokken zijn, zien



ze duidelijk de waarde van deze week voor zowel de bedrijven als voor de deelnemende wiskundigen dus ze steunen het van harte. Bovendien is het ook goede PR voor de exacte wetenschappen. Er wordt meestal aardig wat aandacht in de pers gegeneerd (helemaal dit jaar, door de goede zorgen van onze PR-medewerker en -werkster !) zodat mensen weer eens zien waar wiskunde ingezet kan worden om mee te helpen problemen op te lossen. De problemen van dit jaar waren daar ook zeer geschikt voor. Iedereen kan begrijpen dat het rangeren van treinen een lastige zaak kan zijn, en dat modellen nuttig kunnen zijn om de regenwaterafvoer tussen Regge en Dinkel zo goed mogelijk te laten verlopen.

**Als Financial Engineeringsman vond je het niet jammer dat er geen financieel bedrijf aanwezig was met een leuke opdracht?**

Michel:

We hebben wel degelijk contacten gehad met financiële bedrijven maar dit keer kwam er geen opdracht uit rollen waar we op korte termijn iets mee konden. We zijn streng in de selectie van geschikte problemen en hoewel ik natuurlijk inderdaad graag een typische financiële opdracht erbij gezien had, kan dat natuurlijk niet de doorslag geven. Er is in het organisatie-team ook uitgebreid overlegd over de opdrachten dus de mening van een persoon kan niet doorslaggevend zijn. Maar ik heb Jaap Molenaar

in Wageningen, die de volgende SWI voor zijn rekening neemt, natuurlijk wel al stiekem een contactpersoon bij een bank toespeeld met de mededeling dat ze het nog maar eens moeten proberen...

**Hoe heb je de organisatie van deze week ervaren?**

Michel:

Het was enorm leuk. De organisatie vooraf en alle kleine dingen tijdens de week zelf geven soms een hoop stress maar of het leuk is om zoiets te organiseren hangt natuurlijk vooral van de teamleden af, en dat is bijzonder goed bevallen. Er werd een hoop gelachen tijdens de vergaderingen en ik heb de samenwerking heel erg leuk gevonden. Tegelijkertijd zijn we natuurlijk allemaal blij dat het nu weer achter de rug is en dat het zo goed gelopen is (de grootste SWI ooit, HA !) want het kost ook wel een hoop tijd. Heb al veel zin in de volgende SWI waar ik als deelnemer mee mag doen en alleen geamuseerd hoeft toe te kijken terwijl de organisatie zich het vuur uit de schenen loopt !





# Study Group Mathematics with Industry 2009

$$\partial_x h(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=0}^{\infty}$$

January 26 - 30, 2009  
Wageningen University

Registration and information:  
[www.swi2009.wur.nl](http://www.swi2009.wur.nl)



# Wiskunde en coöperatieve spellen

Na een traject van bijna 2 jaar ligt er eindelijk een spel van mij in de winkels! *Stop de Stropers*. Graag leg ik jullie uit in welke opzicht Toegepaste Wiskunde hierbij nuttig is gebleken.

Jouke (Jago) Korf

Besef als eerste dat er zijn oneiding veel spelregels zijn te bedenken, maar dat er maar een relatief zeer beperkt aantal “winnende” combinatie is. Doel is om een optimale selectie van spelregels te pakken en hier een spel van te maken. In mijn geval is dit een coöperatief spel geworden, wat inhoud dat alle spelers samenwerken en met zijn allen proberen te winnen, en “het bord” te verslaan. Maar iedereen kan natuurlijk ook verliezen.



## Korte uitleg Stop de Stropers

Het bord is een natuurgebied onderverdeeld in bossen met zwijnen, weiden met herten en meren met eenden. Iedere beurt komen er meer dieren in het spel en ook iedere beurt bewegen de stropers door het natuurlijk gebied. Dit gebeurt met beperkte onverspelbaarheid aan de hand van een kleurendobbelsteen. De spelers kunnen de dieren verplaatsen en we zijn boswachter die door het natuurgebied verplaatsen om de stropers te vangen. Als we alle stropers hebben gevangen voordat de stropers 1 dier hebben gevangen, hebben we gewonnen. Anders hebben we allemaal verloren.

## Het ontwikkelen van een coöperatief spel

Bij het ontwikkelen van een (coöperatief) spel moet je rekening houden met erg veel verschillende factoren en randvoorwaarden. Zonder ook maar een enkele formule te gebruiken, pas ik hierbij veel wiskunde inzichten toe is de vorm van creatief denken, optimalisatie problemen en iteratief rekening houden met alle onderstaande voorwaarden. Hieronder staat een deel van de factoren waar je bij het bedenken van een coöperatief spel rekening moet houden:

- Het spel moet spannend zijn vanaf het begin tot het einde, en oplopen met een bepaalde spanningsboog die eindigt in een climax.. Je speelt tegen het bord, dus hoe genereer je opbouwende dreiging?
- Het spel moet een leuk thema hebben waar de regels realistisch op zijn afgesteld. De spelers moeten zich kunnen verplaatsen in het spel en “meeleven” met de speelstukken.
- Het spel moet vernieuwende spelmechanisme hebben. Het spel moet uniek zijn in de markt. Je moet dus spelregels bedenken die nog nooit toegepast zijn in alle andere bestaande spellen.
- De winkans moet ongeveer 60% zijn voor de jongste spelers in je doelgroep (8 jaar). Daarnaast moet het niet te makkelijk zijn voor oudere of ervaren spelers. Dit moet bereikt worden met 1 makkelijke eenduidige regel. Ook moet de winkans onafhankelijk zijn van het aantal spelers, zodat je niet baalt als er een extra speler mee doet.
- Er moet niet te veel variantie zitten in de tijdsduur. Het is vooral voor jonge spelers fijn als ze weten hoe lang het spel ongeveer duurt. Bovendien moet het spel niet te lang duren.
- Het gehele spel (mechanisme, doel en spelregels) moet duidelijk en logisch zijn voor de jongste spelers in je doelgroep.
- Bovenstaande moet je allemaal zien te bereiken met zo weinig mogelijk spelregels met geen enkele onlogica of “gaatje”. Geen uitzonderingen of speciale gevallen dus.
- Als dat nog niet genoeg is, moet het spel ook nog eens zo goedkoop mogelijk worden, terwijl het spel er wel aantrekkelijk uit blijft zien. De uitdaging van het minimaliseren geldt dus voor de spelregels als voor de kosten.
- Dit betekent niet dat je zo weinig mogelijk speelstukken in je spel wilt hebben, want je hebt ook nog te maken met standaard stansframes die bij de drukker gebruikt worden. Nog een extra element om rekening mee te houden dus.

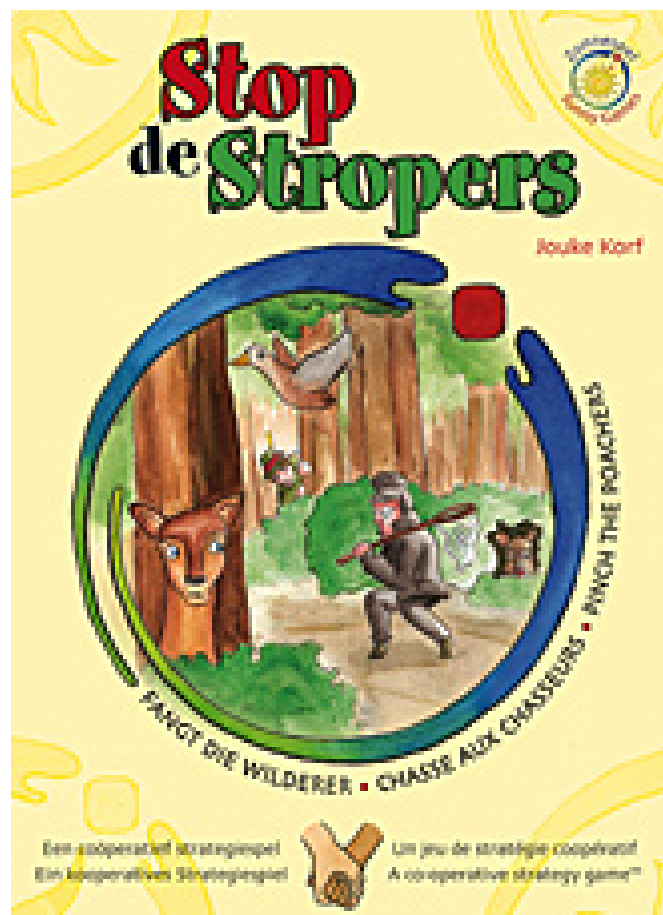
Stop de Stropers bevat na 2 jaar ontwikkelen alle bovenstaande elementen. Tijdens het ontwikkelen kwam ik continu problemen tegen, maar omdat er oneindig veel spelregels zijn weet je 100% zeker dat er een oplossing is. Je moet alleen nog bedenken wat de oplossingen is. Omdat je rekening moet houden met al het bovenstaande, kan het betekenen dat je het spel drastisch moet aanpassen en een paar grote stappen terug moet doen in het proces.

### Waarom een coöperatief spel?

De kracht van een cooperatief spel zit in het samenwerken. Het draait een keer niet om wie het meeste geluk of skills heeft. Vooral voor kinderen is het erg leerzaam om te overleggen en proberen gedachten te verwoorden en beargumenteren. Maar ook voor volwassenen is dit meestal nog een aardige uitdaging. Koop het spel, nodig een paar vrienden uit en probeer het maar eens! Ook leuk om kado te doen tijdens de feestdagen, met een zacht spellenprijsje van 20 euro.

### Waar te koop?

Kijk voor verkooppunten (winkels en internet) op [www.zonnespel.nl](http://www.zonnespel.nl). Laat me even weten wat je er van vond op [www.joukekorf.nl](http://www.joukekorf.nl) Bedankt!





## Doe toch normaal!

Dit dringende verzoek zal iedereen wel eens naar het hoofd gekregen hebben. Op zo'n moment is je omgeving niet helemaal happy over je gedrag en die laat dan duidelijk merken dat er wat anders van je verwacht werd. Het opvallende is dat zo'n verzuchting niet alleen te horen valt bij mensen, maar eigenlijk ook bij allerlei zaken, zoals gebeurtenissen, processen, ontwikkelingen, etc. Misschien niet letterlijk, maar de kreet 'doe toch normaal!' vat het wel mooi samen.

Wim Albers



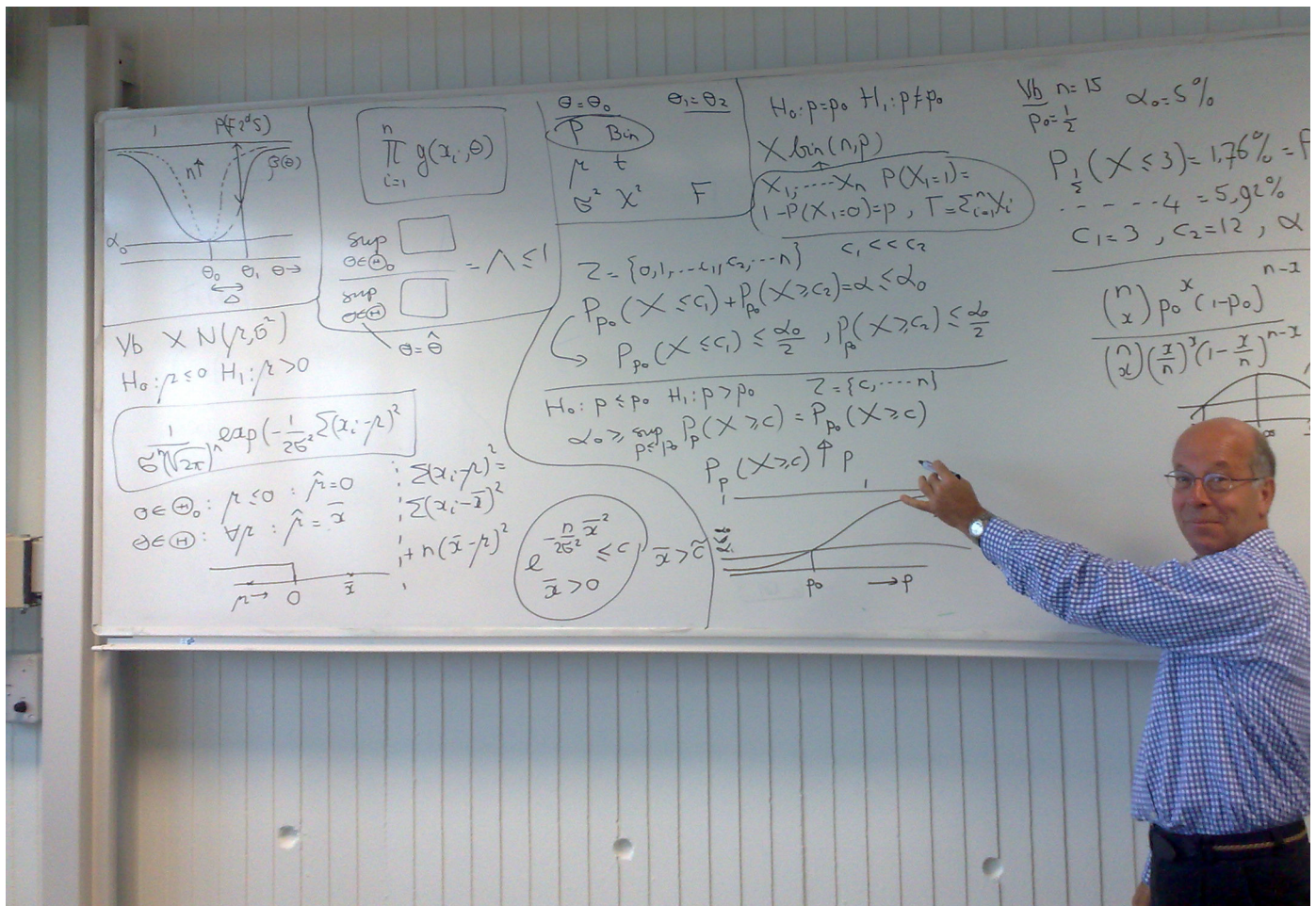
Hoe zit dat? Wel, om allerlei zaken die in het dagelijkse leven van groot belang zijn in de greep te houden of te krijgen, werken wetenschappers graag en veel met modellen. Dat is een fascinerende bezigheid, die zowel diep denkwerk als praktisch benul vereist. Het is ook een gevaarlijke sport, want het gaat nogal eens mis. Economen mopperen bijvoorbeeld vaak: "onze modellen kloppen wel, maar de mensen houden zich er niet aan". Bij (toegepaste) wiskundigen is het niet anders: het mathematisch modelleren van de wereld om ons heen is een mooie, maar hachelijke, bezigheid. Dit geldt des te sterker wanneer ook het toeval nog een wezenlijke rol speelt, zoals bij onze leerstoel Statistics and Probability (SP) bij uitstek het geval is. De kunst is dan om de onzekerheid te (be)grijpen en aan betrouwbaarheidsbanden te leggen.

Maar hoe doe je dat? Ook hier geldt: door goede modellen op de werkelijkheid los te laten. Het prototype in dit opzicht binnen de statistiek is het zogeheten normale model. De befaamde Centrale Limietstelling uit de kansrekening beweert immers dat op den duur alles min of meer normaal verdeeld is, dus helpt dat normale model als een middel tegen alle kwalen. Toch? Of niet? Het feit dat de vraag gesteld wordt, doet al vermoeden dat het antwoord weliswaar meestal 'ja' is (moet wel, anders was die Centrale Limietstelling niets waard), maar, vaker dan je lief is, toch ook 'nee'! Om de economen te parafaseren: "onze modellen kloppen wel, maar de data houden zich er niet aan". Het proces dat je probeert te modelleren produceert blijkbaar afwijkende data en de noodkreet 'doe toch normaal!' komt boven drijven.

Echt helpen doet dat natuurlijk niet: mensen luisteren vaak al niet naar zo'n aansporing en van processen hoef je niet veel beters te verwachten. Er zit weinig anders op dan om maar eens goed uit te zoeken waarom die data zo abnormaal doen. Als je eenmaal snapt waar het probleem zit, kun je de modellering verfijnen tot je iets hebt dat de onderliggende werkelijkheid wèl adequaat weergeeft. Dit klinkt misschien wat soft: de statisticus die, als een soort therapeut naast de data-bank, na een serie goede gesprekken een geschikt gedragsmodel voorstelt. Toch loopt de vergelijking minder mank dan je misschien denkt. Het is van vitaal belang dat je je als statisticus goed verdiept en inleeft in het probleem waarmee je cliënt (bedrijfskundige, medicus, econometrist, actuaire, financieel specialist, onderwijskundige, etc.) binnenkomt. Dit is het bovengenoemde 'praktisch benul', dat bij het maken van een passend model onmisbaar is. Daarna volgt dus pas het eveneens genoemde en net zo onmisbare diepe denkwerk. Het eventuele soft is er dan wel af: er moet nu een vertaalslag gemaakt worden om de praktische aspecten om te zetten in bijvoorbeeld geschikte verfijningen van de Centrale Limietstelling die in de gegeven situatie wel 'werken'. Dat is pittige wiskunde (Fourier analyse, hogere orde asymptotiek, etc.), die leuk, mooi en elegant is en waar ik graag meer over zou vertellen. Maar in het kader van een stukje als dit, is dat niet echt handig, dus (met enige moeite) houd ik me maar in...

Wat wel kan, is iets vertellen over wat er dan uiteindelijk zoal uitkomt. De cliënt is bijvoorbeeld een bedrijfskundige die controlekaarten voor grootschalige productieprocessen moet maken. Per gecontroleerde eigenschap mag maar een minieme fractie (vaak gemeten in 'parts per million' (ppm)) van de producten defect zijn en zo'n kaart moet die er uit zien te halen. De standaard aanpak gaat uit van normaliteit en in het midden van de onderliggende verdeling van de gemeten eigenschap klopt dat best mooi. Maar in dat midden zit letterlijk en





figuurlijk het probleem niet. Het venijn zit in de staart van de verdeling, bij de kleine kansen dus, anders had de klant het niet over 'ppm'. En als we die staart onder de loep nemen, zien we dat daar van die normaliteit ondertussen bitter weinig meer klopt. Roepen 'doe toch normaal!' gaat echt niet helpen, maar het verzinnen van een nieuwe, slimme methode, uiteindelijk wel.

Het leuke van wiskunde of ~kunst is vervolgens dat vaak één kunst(je) in essentie geschikt is om problemen op heel verschillende toepassingsgebieden op te lossen. De laatste tijd komen vragen op het gebied van 'health' steeds meer in de belangstelling. Een toepassing hier is 'health care monitoring': het tijdig signaleren als de frequentie oploopt waarmee iets 'naars en zeldzaams' gebeurt (genetische afwijking bij nieuwgeborenen, terugkeer ernstige ziekte blijkend bij nacontrole, foute afloop na operatie). De bovengenoemde expertise die opgebouwd is om hoogkwalitatieve industriële productieprocessen op een goede manier statistisch onder controle te houden, laat zich tot op grote hoogte vertalen naar zulke medische toepassingen, waarmee dus een heel andere categorie cliënten geholpen kan worden. Naast de bedrijfswiskundige en de medicus, geldt dat trouwens ook nog voor de verzekeringswiskundige of bankier. Ook zij lijden namelijk geregeld onder abnormaliteit en venijnige staarten. Wat is het geval? Noch een bank, noch een verzekeringsmaatschappij, noch een pensioenfonds, horen failliet te

gaan (al lijkt dat de laatste tijd niet altijd meer zo zeker...). Daarom bewaken zij ons (hun?) geld ijverig, door er zodanige reserves op na te houden dat ze altijd aan hun verplichtingen kunnen voldoen. Echt altijd? Nou ja, bijna altijd dan: de kans dat het toch misgaat, moet héél klein zijn, bijv. 0.1 % op jaarbasis. Dat is de bekende 'eens in de duizend jaar', dus dat klinkt niet verkeerd. Maar, hoe wordt die kans eigenlijk berekend? Met een of ander model, waarschijnlijk? Toch niet per ongeluk een normaal model....? De oplettende lezer weet inmiddels hoe dit afloopt: wèl verkeerd dus. Veel vaker dan de 0.1% garantie suggereert, gaat de boel mis. Stevig denken is nodig om de modellering te verbeteren en de staartkansen alsnog onder controle te krijgen.

Bovenstaand drieluik aan toepassingen geeft een aardig representatieve indruk van wat er zo al kan met statistiek en kansrekening. Natuurlijk is het ook niet meer dan een indruk: uiteraard zijn we niet alleen bezig met het verbeteren en vervangen van normale modellen, maar met allerlei aspecten van allerlei modellen waarin het toeval een rol speelt. In algemene termen kunnen we zeggen dat het daarbij altijd gaat om de vragen of het model de werkelijkheid goed genoeg beschrijft en (als we dat eenmaal hebben vastgesteld) welke conclusies we uit het model kunnen trekken.



# Hoe een maatschappelijk probleem kan leiden tot een Wiskundige Bacheloropdracht

De bacheloropdracht kan worden gezien als een modelleeropdracht van een complex wiskundig probleem. De opdracht wordt uitgevoerd met een team van - in principe - 3 studenten en wordt begeleid door een TW-docent. De bacheloropdracht bestaat uit twee delen; de voorbereiding met een literatuurstudie en de uitvoering van de opdracht en vindt plaats in het laatste jaar (3e jaar) van de Bachelorstudie. We willen nu laten zien waar de studenten in de Bachelorstudie zich zoal mee bezighouden.

Het team schrijft een verslag met daarin de inhoudelijke verantwoording van het werk en de reflectie op het model en het resultaat. Daarnaast wordt een voordracht gehouden en worden de teamleden individueel nog vragen gesteld.

De doelstelling van de bacheloropdracht is het in teamverband doorgronden van een complex wiskundig probleem op bachelorniveau en bij dit probleem een model opstellen. Er dient aandacht te zijn voor implementatie van het model, verificatie en toepassing naast het modelopzet. De resultaten zullen zowel mondeling als schriftelijk gepresenteerd worden op wijze die voor buitenstaanders begrijpelijk is.

Tijdens het uitvoeren van de bacheloropdracht komen de volgende competenties aan bod:

- een planning maken
- literatuur raadplegen en gebruiken
- gegevens verzamelen
- kennis, opgedaan in de studie toepassen
- wiskundige resultaten integreren
- grenzen inzien
- in teamverband werken

## Toegepaste Wiskunde? Maar wat is daar toegepast aan dan?

Eén van de lastigste eigenschappen aan een studie Technische Wiskunde is het uitleggen wat er nu toegepast is aan je studie. Wiskunde kent iedereen wel, maar waar de toepassingen ervan te vinden zijn is niet bij iedereen even duidelijk. Ikzelf heb er altijd moeite mee om een leuk voorbeeld te geven waarin de wiskunde die je leert toegepast wordt zodat het niet te abstract wordt. Dat je de logistieke problemen bij een groot bedrijf op kan lossen spreekt toch niet altijd tot de verbeelding van je gesprekspartner.

Arjan Feenstra

Maar sinds kort heb ik daar geen enkel probleem meer mee. Ik heb namelijk een bacheloropdracht gedaan. Aan het eind van je bachelor werk je gedurende een half jaar in een groep van 2 tot 4 studenten aan een probleem uit de praktijk waarbij je de wiskunde die je geleerd hebt in je opleiding toe kan passen. De opdracht waar ik samen met Maarten Bos en Niek Baër aan heb gewerkt, was een uitermate geschikt voorbeeld om uit te leggen waar ik dat wat ik allemaal in Enschede aan het leren ben nu nuttig voor is.

Wat namelijk wel tot de verbeelding van de gemiddelde nederlander spreekt is films. Iedereen heeft ze wel eens gezien, iedereen heeft wel een favoriete film en iedereen heeft ook wel een mening over of een film goed is of niet. Moeilijker is echter van tevoren bepalen welke films goed gaan worden en welke films het publiek gaat waarderen. En dat is nu juist waar ik mij tijdens de bacheloropdracht mee bezig gehouden heb. In samenwerking met het Nederlands Film Fonds hebben wij de selectieprocedure van de uitvoeringsregeling van dit fonds onder de loep genomen.

Jaarlijks wordt er namelijk veertig miljoen euro beschikbaar gesteld door de overheid om nederlandse filmmakers aan te moedigen om commerciële en artistieke kwaliteitsfilms te maken te stimuleren. Een deel van dat geld gaat in de uitvoeringsregeling zitten. In het kort is deze regeling er om filmmakers een mogelijkheid te bieden subsidie te ontvangen voor hun films wanneer de film nog in de kinderschoenen staat. Wat echter erg belangrijk is, is het bepalen welke films gesubsidieerd moeten worden, oftewel een commercieel danwel artistiek succes gaan opleveren. Dat is niet gemakkelijk aangezien er nog maar weinig bekend is over de film.

Nu vraagt de gesprekspartner zich natuurlijk af wat een toegepaste wiskundige nou weet over films en waarom die zou kunnen helpen met het bepalen van



de beste films. En daarom is het ook zo'n mooi voorbeeld, je zou het niet verwachten dat een toegepast wiskundige bij kan dragen aan oplossingen voor problemen als deze.

Wat er namelijk gebeurt bij deze regeling is de beoordeling van een filmplan waar een subsidieaanvraag voor ligt, gedeeltelijk baseren op de prestaties van de makers van deze film in het verleden. Als Paul Verhoeven bijvoorbeeld een film gaat regisseren, kan je er haast donder op zeggen dat deze film een kaskraker gaat worden. En als er data beschikbaar is kan een toegepast wiskundige daar waarden aan koppelen en begint het gespeel met getalletjes. Want daar lijkt het vaak op wat we doen. Neem hier een som en daar een e-macht en er rolt wel een mooi getalletje uit.

Dat is natuurlijk niet hoe wij te werk gaan. Gedurende onze Bacheloropdracht hebben we intensief contact gehad met het Nederlands FilmFonds om tot het resultaat te komen, wat we nu hebben bereikt. We zijn meerdere malen bij het filmfonds in Amsterdam op bezoek geweest. Tijdens onze bezoeken hebben we overleg gehad met het filmfonds of wat wij hebben gemodelleerd de werkelijkheid benadert en of dat wat het filmfonds graag wil dat ons model oplevert ook uit het model komt.

Daarnaast hebben we kennis mogen maken met één van de taken van een wiskundige in het bedrijfsleven: het verkrijgen van geschikte data om je model tot een succes te brengen. Want zonder de juiste data wordt het niets. Na een aantal treinritten richting en vanuit Amsterdam is er dus een start gemaakt aan een database welke een zo compleet mogelijke database hoort te worden van films van Nederlandse filmmakers uit de geschiedenis van de nederlandse filmindustrie met bijbehorende bezoekersaantallen, gewonnen prijzen en meer.

Aan de hand van deze data is er een waardering van elke filmmaker (gecategoriseerd in schrijvers, regisseurs en producenten) gemaakt. Vervolgens bepaalt het model van een filmteam dat een subsidie aanvraagt, aan de hand van de waarderingen van de afzonderlijke filmmakers, een totale waardering. Voor wie wil weten hoe dit exact in z'n werk gaat, adviseer ik contact op te nemen met prof. dr. Richard Boucherie en/of dr. Judith Vink-Timmer, welke ons begeleid hebben tijdens onze opdracht. Deze zijn momenteel bezig het model verder uit te werken in nauwe samenwerking met het Nederlands Film Fonds.

Conclusie van mijn verhaal is dat ik tegenwoordig, als iemand mij vraagt wat er nou toegepast is aan de studie Toegepaste Wiskunde, met een verhaal kom over hoe je kan voorspellen of een film een succes gaat worden.



## Buiten adem - Over complexiteit en adaptief vermogen -

*Wanneer je een operatie moet ondergaan, is het van belang dat je conditie goed is. Het is vrij logisch en duidelijk dat mensen op hogere leeftijd een minder goede conditie hebben dan jongere mensen. In de Gelderse Vallei in Ede is men gestart met een onderzoek naar pre-operatieve fysiotherapie. Mensen worden voorafgaand aan de operatie getraind om op die manier hun conditie te verbeteren. Vervolgens wordt er gekeken wat het effect hiervan is op de hersteltijd en de kans op complicaties.*

Giske Lagerweij

### Functioneel vermogen meten

Er zijn verschillende artikelen verschenen over het verband tussen de complexiteit van fysische signalen en het functioneel vermogen van patiënten. (voor de basis van het idee is vooral Dynamics of stability: The physiologic basis of functional health and frailty, 2002 van Lipsitz erg interessant) Dit verband is bij bepaalde signalen (Heart Rate Variability, neurologische) duidelijk aanwezig. De achterliggende gedachte is dat een complexer systeem beter om kan gaan met externe stressoren (invloeden). Bij het beschreven onderzoek is de belangrijkste stressor, die de patiënt moet ondergaan, de operatie. Uit de indicaties vanuit de literatuur en de opzet vloeide de vraag voort of de complexiteit van de output van een RMAmeting (De Respiratory Muscle Analyser is een meetinstrument dat ademhalingscapaciteit meet) iets zegt over het herstel van COPD-patiënten (Chronic Obstructive Pulmonary Disease is



een ziekte waarbij de luchtverplaatsing in sommige delen van de longen geblokkeerd wordt, waardoor de longcapaciteit kleiner wordt) na een buikoperatie. Er werd gekeken naar buikoperaties omdat deze veel invloed hebben op het diafragma (de spier die de longen groter maakt, zodat lucht aangezogen wordt).

### Complexiteitsmaten

Voordat complexiteit gemeten kan worden, moet het eerst duidelijk gedefinieerd worden. Voor de complexiteit van signalen is geen eenduidige definitie. In de literatuur komen er een aantal benaderingen naar voren: Entropie, self-similarity en fractale dimensie.

Entropie is de hoeveelheid chaos in het systeem. We kwamen veel entropiematen tegen waarvan we de volgende gebruikt hebben: Aproximate Entropy, Sample Entropy, Lempel-Ziv compression Entropy, Permutation Entropy, Base-scale Entropy en Wavelet Entropy. Al deze maten geven op een bepaalde manier aan hoe voorspelbaar het systeem is. Dit gebeurt bijv. door de kans te schatten dat als een tijdserie  $n$  punten lang gelijk is, dat signaal op  $n + 1$  nog steeds hetzelfde is.

Self-similarity houdt in dat een deel van het proces dezelfde statistische verdeling heeft als het hele proces. Methodes die we gebruikt hebben om de self-similarity te schatten zijn de Hurst Exponent en de Detrended Fractal Analysis (DFA). Bij DFA wordt self-similarity bijvoorbeeld geschat door het signaal te verdelen in blokken en op elk van deze blokken lineaire regressie toe te passen. De stijging van de totale kwadratische afwijking als de blokgrote groter wordt geeft een indicatie voor self-similarity in de tijdserie.

De fractale dimensie is een geometrische dimensie van tijdseries. Deze wordt gemeten door de tijdserie te normaliseren en bij deze genormaliseerde serie te kijken naar het lijnlengthe.

### Onderzoek

Binnen het onderzoek zijn twee stappen gezet. Omdat van de beschreven methodes niet duidelijk was welke goed zouden werken, is er ten eerste een verkennend onderzoek gedaan waarbij naast RMA-data van COPD-patiënten en RMA-data van gezonde personen ook andere data geanalyseerd is met behulp van de verschillende methodes. De tweede stap was een onderzoek bij een nieuwe onderzoeksgroep naar hypothesen die gesteld waren aan de hand van het eerste onderzoek.

De extra data die voor het verkennend onderzoek is geanalyseerd, was hartslag-interval data van zowel gezonde mensen als mensen met chronisch hartfalen. Voor deze data was gekozen, omdat in de literatuur herhaaldelijk succesvolle resultaten van analyse van deze data naar voren kwamen. Na

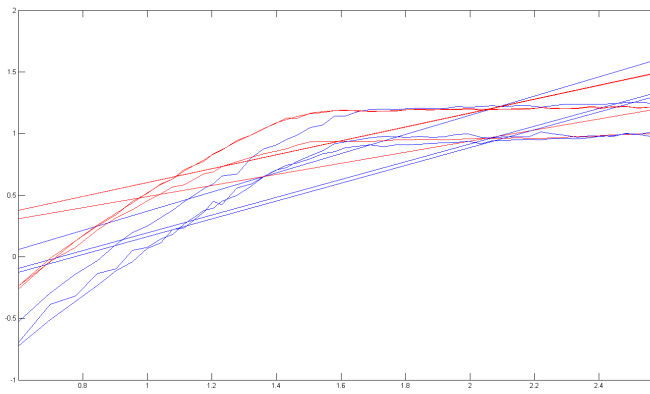
onze analyse waren de resultaten echter zodanig dat er te weinig onderscheid gemaakt kon worden tussen de patiënten en de gezonde groep, onafhankelijk van de methode. De Lempel-Ziv compression Entropy leverde de meest veel belovende resultaten. Echter, het onderscheidend vermogen daarvan kwam bij lange na niet in de buurt van het onderscheidend vermogen die sommige methodes in de literatuur bleken te hebben. Hierop hebben we een goed omschreven analyse uit de literatuur (J. Li and X. Ning. Dynamical complexity detection in short-term physiological series using base-scale entropy. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 73(5), 2006), welke is gebaseerd op de Base-scale Entropy, precies proberen na te bootsen in alle factoren. Echter zelfs met vele pogingen tot modificatie van de data danwel met het gebruik van andere parameters lukte het niet om het onderscheidend vermogen te creëren die zij hadden gevonden.

Na deze resultaten hebben we een andere aanpak geprobeerd. Deze hield in dat we alle mogelijke combinaties van twee methodes bekeken. Twee methodes kunnen samen allicht beter onderscheiden aangezien ze verschillende aspecten van de signalen analyseren. Ook dit bleek echter helaas niet de resultaten af te werpen waar we naar verlangden met zicht op het literatuuronderzoek.

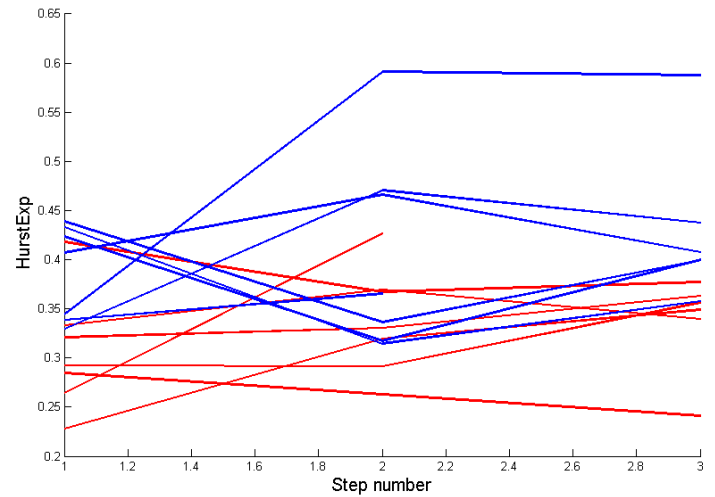
De eerste resultaten van analyse van RMA-data leken interessanter te zijn. Vooral de Detrended Fluctuation Analysis en de Fractal Dimension maakten duidelijk onderscheid tussen de gezonde en de zieke groep. Verder onderzoek toonde echter aan dat dit vooral te maken heeft met het feit dat beide maten sterk beïnvloed worden door de ademfrequentie. Bij de DFA treedt er een knik op in de plot van de logaritme van de kwadratische afwijking tegen de logaritme van de blokgrote rond de plek van gemiddelde ademfrequentie (zie guur 1). De plaats van deze knik is zeer bepalend voor de hellingshoek van de regressielijn.

Het feit dat de Fractal Dimension een goed onderscheid gaf (en een hoge correlatie met de DFA) is te verklaren uit het feit dat er meer ademhalingscycli in de dataset zaten, waardoor de lijnlengthe langer werd. Deze constatering bevestigde onze twijfels over de bruikbaarheid van deze maat.

De aan de hand van het verkennend onderzoek gestelde hypothesen konden we niet verwerpen in het tweede onderzoek. Te weinig data (voor de twee onderzoeken samen in totaal veertien mensen) is daarvoor waarschijnlijk een belangrijke reden. Door samenvoeging van de datasets van de twee onderzoeken leken er echter wel nieuwe feiten boven tafel te komen. De Hurst Exponent gaf vrij goede resultaten (zie guur 2) en zou verder onderzoek waard zijn. Ook de Lempel-Ziv compression-entropy gaf bij het combineren van data betere resultaten.



Figuur 1:  $\text{Log}(F(n))$  vs  $\text{Log}(N)$ , waarbij  $N$  de blokgrote is en  $F(N)$  de kwadratische afwijking bij blokgrote  $N$ . Blauw is de gezonde groep en rood de patiëntengroep.



Figuur 2: De waarde voor de Hurst Exponent voor verschillende belastingen (1=geen, 2=gemiddeld, 3=zwaar). Blauw is de gezonde groep en rood de patiëntengroep. Een lijn stelt een patiënt voor.



### Conclusies

Het gebruik van complexiteitsmaten om een indicatie te geven voor de conditie van een patiënt werkte niet zo goed als aan de hand van literatuur verwacht kon worden. Daarbij moet gezegd worden dat het idee tot nu toe (naar ons weten) nog niet toegepast is op ademhalingsignalen. Wel zijn er een aantal terreinen die verder onderzoek waard zijn. Dat zijn dan vooral de Hurst Exponent en de Lempel-Ziv compression Entropy als complexiteitsmaten.



## Betere zorg voor dezelfde prijs?

Bij het draaiend houden van een ziekenhuis komen gigantische bedragen kijken. Een afdeling binnen het ziekenhuis ook veel geld naar toe gaat is de Centrale Sterilisatie Afdeling (CSA). Dit is een afdeling binnen het ziekenhuis die er voor zorgt dat instrumenten en netten gesteriliseerd worden.

Jelle Duives

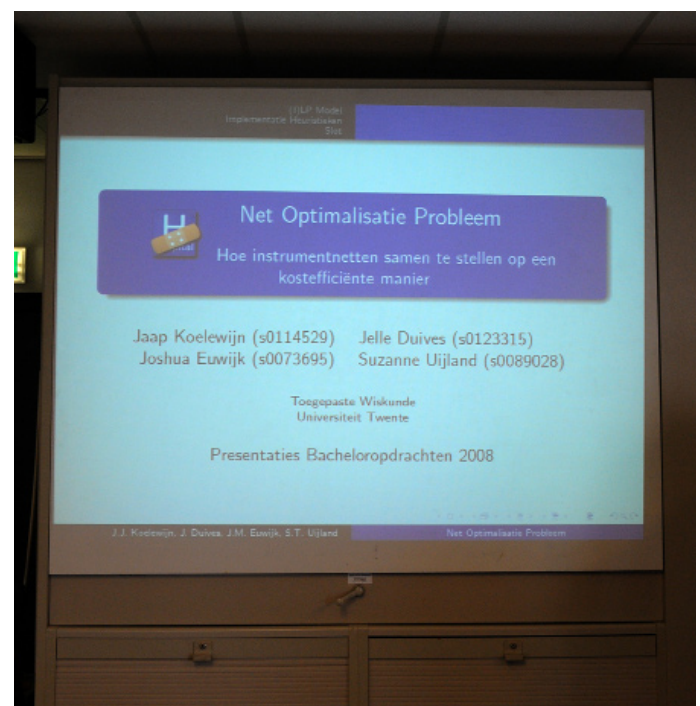
Met netten worden hier instrumentnetten bedoeld, dit zijn metalen bakken die instrumenten bevatten voor een operatie. Vaak wordt voor een zeker type operatie een “basisnet” gebruikt met daarbij voor de individuele operaties ook nog operatiespecifieke netten. Wanneer een net gebruikt wordt wil het echter niet zeggen dat ook alle instrumenten uit dit net worden gebruikt. Na afloop van een operatie wordt ieder net in zijn geheel gesteriliseerd, dus ook de instrumenten die niet gebruikt zijn bij de operatie. Hierbij blijft een net gedurende de gehele sterilisatiecyclus hetzelfde. Het is voor het ziekenhuis zaak om te zorgen dat de totale kosten voor het steriliseren van alle netten inclusief instrumenten minimaal zijn. Dit vraagt om een slimme netsamenstelling. De vraag die hier naar voren komt is: Hoe is de samenstelling van instrumentnetten in ziekenhuizen te verbeteren, zodanig dat de kosten van de instrumentnetcyclus voor het ziekenhuis minimaal zijn? Het is een groot probleem en het is daarom met de huidige computerkracht onmogelijk om deze ILP exact op te lossen. Met AIMMS wordt daarom een LP-model gebruikt waarvan de oplossingen geheeltallig worden gemaakt. Daarnaast wordt in Delphi met behulp van Local Search methoden gezocht naar oplossingen die de optimale netsamenstelling benaderen. In dit artikel wordt alleen ingegaan op de werking en de resultaten van Local Search methoden.

Voor het vinden van een ‘goede’ samenstelling van instrumentnetten moeten eerst de kosten van de instrumentnetcyclus goed worden gedefinieerd. De totale kosten bestaan uit de kosten per instrument en de kosten per net. Zowel per gebruikt instrument als per gebruikt net worden zekere schoonmaak- en inpakkosten gerekend (gebruikte instrumenten zijn hier instrumenten die in een instrumentnet zaten dat voor een operatie is gebruikt). Daarnaast worden per net ook nog transportkosten gerekend. Verder zijn er opslagkosten voor de netten die niet gebruikt zijn bij de gebracht voor de eventuele extra instrumenten die een ziekenhuis aan zou moeten schaffen.

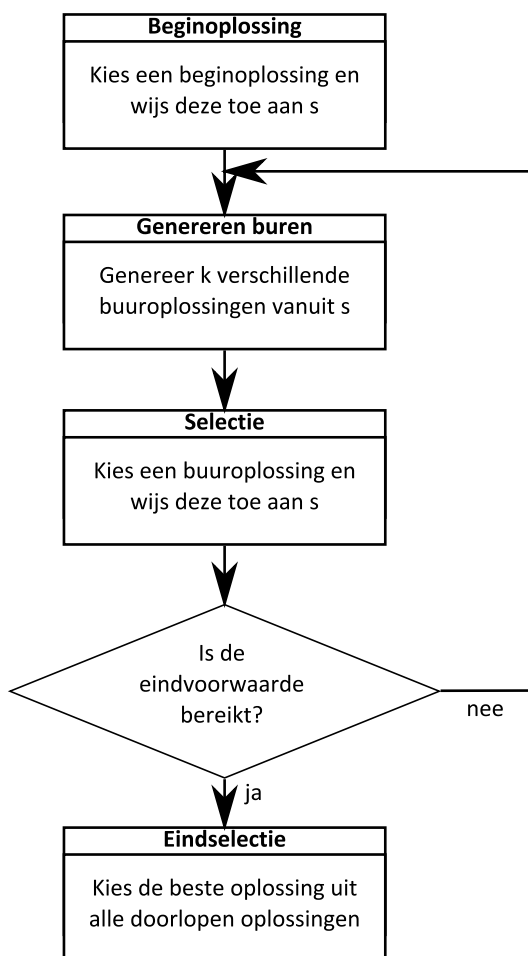
Om de uitslagen van het project aan de werkelijkheid te koppelen is gebruik gemaakt van 2 datasets. Ten eerste heeft het ziekenhuis in Zwolle (de Isala Klinieken) gegevens geleverd over hun huidige instrumentnetten en de aantallen daarvan. Deze set bevat 572 netten en 4539 typen instrumenten. De gegevens van de operaties en de koppeling van de operaties aan de instrumentnetten ontbraken. Er zijn daarom 100 operaties gegenereerd waaraan willekeurig een aantal reeds bestaande netten zijn toegekend. Daarnaast is ook gebruik gemaakt van de netsamenstelling, en de koppeling hiervan aan de operaties, van het ziekenhuis in Winterswijk. Deze data bestaat uit een verzameling van 646 operaties met 165 bijbehorende netten.

Zoals eerder gezegd wordt met Delphi met behulp van Local Search methoden gezocht naar oplossingen die de optimale netsamenstelling benaderen. Voor het gebruik van Local Search methoden moet echter eerst de oplossingsruimte worden gedefinieerd en moet een manier worden bedacht om door deze oplossingsruimte te bewegen. De voornaamste eis waar een oplossing van het probleem aan moet voldoen is dat de vereiste instrumenten bij de betreffende operatie aanwezig zijn. De rest van de eisen wordt verder achterwege gelaten.

Om van een zekere oplossing naar een andere oplossing te lopen zijn een aantal buurfuncties ontwikkeld. Een voorbeeld van zo’n buurfunctie is “Net splitsen”. Bij deze functie wordt een zeker net gekozen dat aan een operatie is toegewezen (Dit net kan voor meerdere operaties worden gebruikt) en dit net wordt op een willekeurige manier gesplitst in 2 aparte netten. Naast deze buurfuncties zijn er ook nog buurfuncties als “Netten samenvoegen”, “Vereniging van netten”, “Net verdubbelen” enz.



Nu de oplossingen zijn gedefinieerd en het mogelijk is om door de oplossingsruimte te lopen kan worden gekeken naar de Local Search methoden zelf. De opbouw van een Local Search methoden ziet er schematisch uit als in Figuur 1. Hierbij is de selectie van de buuroplossing en de eindvoorwaarde voor iedere Local Search methode verschillend. Voor de Local Search methode "Random Walk" bijvoorbeeld wordt de eerste buur die berekend wordt altijd als nieuwe oplossing aangenomen. Als eindvoorwaarde wordt een zeker aantal stappen genomen. Na afloop van de Random Walk werd ook nog een aantal stappen Hill Climbing uitgevoerd (accepteer een betere oplossing, verwerp een slechtere oplossing). Bij "Tabu Search" wordt de nieuwe oplossing die wordt aangenomen in een Tabu-lijst gezet. Deze oplossing mag de komende keer niet opnieuw als oplossing worden aangenomen. Dit is om te voorkomen dat eenzelfde oplossing in korte tijd meerdere keren als oplossing wordt aangenomen. Daarnaast is ook nog gebruikt gemaakt van "Simulated Annealing". Hier wordt de kans dat een slechtere oplossing wordt geaccepteerd in verloop van tijd kleiner.



**Figuur: Schematisch overzicht van Local Search Methode**

Met behulp van bovengenoemde Local Search methoden is er voor de al eerder genoemde datasets gezocht naar een verbetering van de beginoplossing. Zowel voor de dataset van de Isala klinieken als voor de dataset van het ziekenhuis in Winterswijk is gebruikt gemaakt van alle drie de Local Search Methoden. Met het gebruik van Random Walk, Simulated Annealing en Tabu Search werden de kosten voor de Isala klinieken met respectievelijk 50%, 53% en 55% naar beneden gebracht.

Voor het ziekenhuis in Winterswijk werden de kosten met respectievelijk 1,8%, 2,1% en 2,3% naar beneden gebracht. Wat direct opvalt is dat de verbeteringen voor de tweede dataset beduidend kleiner zijn. Dit is waarschijnlijk te wijten aan het feit dat de startoplossing van deze set reeds veel beter was (deze kwam ook echt uit de praktijk). Desondanks zijn ook hier verbeteringen gevonden met alle Local Search methoden.

De belangrijkste conclusie die getrokken kan worden is dat voor de aangeleverde datasets een verbetering kan worden gevonden van de samenstelling van instrumentnetten en de koppeling daarvan aan de operaties met betrekking tot de kosten. Verwacht wordt dat met een eventuele verbetering van het programma ook voor andere ziekenhuizen de reeds bestaande samenstelling van instrumentnetten kan worden verbeterd. Dat zou betekenen dat ziekenhuizen zouden kunnen besparen op hun sterilisatiekosten en deze kunnen gebruiken voor het verlenen van betere zorg. En dat voor dezelfde prijs!





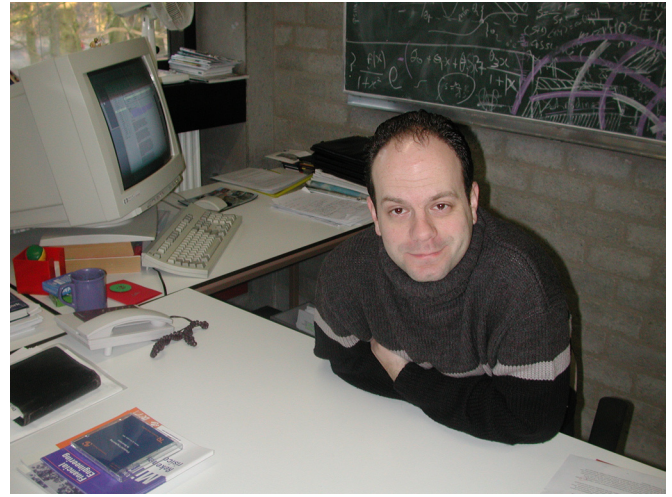
## De kredietcrisis wiskundig bekeken

Op het moment dat ik dit stukje schrijf zitten we midden in wat al de zwaarste financiële crisis sinds 1929 genoemd wordt. Of dat nog steeds het geval is als dit stukje geplaatst wordt, is maar de vraag. Maar ik vermoed van wel. Onlangs hoorde ik namelijk onze eigen Femke Halsema in een onbenullig ontbijtprogramma beweren dat de Amerikaanse regelgeving voor financiële markten enorm tekortschiet. Dat gaf voor mij de doorslag om me echt zorgen te gaan maken. Als het macrobiotische gedeelte van ons politieke spectrum zich met de aandelenmarkten gaat bemoeien, dan is er echt iets ergs aan de hand. Niet dat ik verder erg naar Femke geluisterd heb, hoor. Ik weet niet veel van deze regelgeving maar wel iets. En dat is dat die dermate ingewikkeld is dat je er jarenlang naar moet kijken voor je er zinnige vergaande conclusies over kunt trekken. Kan me niet voorstellen dat Femke, die toch vaak behoorlijk druk is met het redden van een of ander weiland, daar de tijd voor gehad heeft de afgelopen jaren.

Michel Vellekoop

De indruk zou kunnen ontstaan dat ik iets tegen Groen Links heb. Weinig is minder waar. Aangezien ik kinder-, auto- en afwasmachinelos ben, zijn er diverse diersoorten die hun voortbestaan min of meer aan mij te danken hebben. Ik ben dus goed voor het milieu en dat ik geen Groen Links stem doet daar niets aan af. Veel van mijn zich meer op het milieu stortende landgenoten denken dat als je een kruisje achter Femke haar naam zet in het stemhokje, alle bommen ter wereld collectief opgelucht ademhalen. Dat is niet zo. Zeker niet als al die groene stemgerechtigden vervolgens in hun kooldioxidegenerator stappen om de volgende generatie verf-, batterijen en kooldioxidegenerator-kopers van school te halen. Je bent groen als je geen auto hebt, je bent links als je veel geld weggeeft aan mensen die je niet kent, en je bent een goede Christen als je de Christenunie veel te radicaal vindt. Met het stemhokje heeft dat alles niets te maken. Maar kom, ik dwaal af.

De discussie rondom de financiële crisis brengt natuurlijk een uitermate interessante discussie met zich mee over wie er nu schuldig aan dit alles is, en of één en ander voorkomen had kunnen worden. Om het voorzichtig uit te drukken: het is de meeste mensen inmiddels wel duidelijk dat Amerikanen een tikkeltje teveel geleend hebben.



Om precies te zijn: de staatschuld per Amerikaanse inwoner bedraagt nu ongeveer 30.000 dollar en de persoonlijke schuld per Amerikaanse inwoner zo'n 50.000 dollar extra. Dat is ongelofelijk veel en laat zien dat de meeste Amerikanen geen flauw idee hebben hoe je met geld om moet gaan. De Nederlandse getallen kon ik niet precies achterhalen, maar ze lijken niet veel van de Amerikaanse te verschillen. En als ik zie hoe vaak de weerzinwekkend slecht geacteerde reclames van Frisia Financieringen en Postkrediet ons netvlies komen teisteren, vrees ik het ergste. Bovendien zitten we in Nederland op een huizenmarktzeepbel van dermate gigantische proporties dat we er internationaal de aandacht mee trekken.

Dat roept een belangrijke vraag op. Heeft de overheid de taak om mensen die niet met geld om kunnen gaan, te waarschuwen? De antwoorden die mensen op zo'n vraag geven verbazen me soms. De reactie is meestal dat iedereen toch vooral een eigen verantwoordelijkheid heeft. Dat klinkt leuk, maar gaat er natuurlijk wel van uit dat mensen kunnen kiezen. Immers, je kunt iemand niet verwijten dat hij een slechte keuze maakt als hij helemaal geen keuze kan maken omdat hij bepaalde essentiële zaken niet begrijpt.

En dat is volgens mij het probleem: de meeste mensen begrijpen niets van financiële producten. Voor de gemiddelde Nederlander is zelfs het concept van een gewone hypotheek veel te ingewikkeld. Daarmee wil ik geenszins zeggen dat Nederlanders dom zijn, maar meer dat annuïteiten gewoon niet zo'n simpel concept zijn voor mensen die het niet gewend zijn om met getallen om te gaan. En dan heb ik het nog niet eens over beleggingshypotheek, lijfrentepolissen, belastingtechnische voor- en nadelen en eventuele 'rentebedenktijdopties'. Bovendien valt het me op dat zelfs mensen waarvan ik weet dat ze slim, oplettend en nadenkend zijn, zich hebben laten verleiden tot nodeloos risicodragende producten zoals beleggingshypotheek, 'winstver-

snellers', en woekerpolissen. Als het afgestudeerde en pientere deel van ons volk zich door dat soort dingen heeft laten bedotten, wat moeten mensen dan die rekenen heel lastig vinden?

Juist daarom is het zo belangrijk dat risico's door professionals zo veel mogelijk afgedekt worden. Het is in de huidige moeilijke omstandigheden extra belangrijk dat er wiskundigen opgeleid worden die daar verstand van hebben. Want de media mogen de schuld voor de kredietproblemen graag bij de banken en verzekeraars leggen, maar dat lijkt me niet erg terecht. Bepaalde zaken zijn verergerd door ondoorzichtige beleggingsproducten; dat is zeker waar. Maar dat is niet het echte probleem. Als teveel mensen extreem dure dingen zoals huizen en auto's op afbetaling gaan kopen en vervolgens niet op tijd betalen, dan is daar geen enkel financieel systeem tegen opgewassen. Sterker nog, door de schuld vooral bij de banken, verzekeraars en pensioenfondsen te leggen worden die nu gedwongen om elk risico te mijden. En dat heeft vreselijke gevolgen voor de economie, omdat nu vrijwel geen enkel risicodragend krediet meer beschikbaar is.

Financiële wiskunde helpt bij het ontwikkelen van producten die het doel hebben om risico's te spreiden. Dat was altijd al belangrijk, maar is nu belangrijker dan ooit. Of het nu gaat om een pensioen dat ook nog genoeg waard is tegen de tijd dat je er van rond moet komen, een verzekering die beschermt tegen brand of ziekte, of een put-optie die een beleggingsportefeuille kan helpen beschermen: zonder wiskundige modellen lukt het allemaal niet. Ik verwacht dan ook dat er in de toekomst juist op dit gebied voor wiskundigen veel extra werk aan de winkel is.



Michel

Michel Vellekoop is Universitair Hoofddocent Financiële Wiskunde aan de UT.



# Studenten aan het woord

## De keuze voor een Master Financial Engineering



Mijn naam is Jantine Koebrugge (22) en ik ben in september 2008 begonnen met de master Financial Engineering aan de UT.

Jantine Koebrugge

Na acht jaar basisschool in Delden (Overijssel) ben ik naar het Twickel College in Hengelo gegaan. Hier heb ik in 2004 mijn atheneumdiploma gehaald met het profiel Natuur en Techniek. Het kiezen van een studie was niet makkelijk, maar ik heb uiteindelijk gekozen voor Bedrijfskunde in Groningen. Bedrijfskunde is een combinatie van wiskunde en econometrie. Na drie jaar studeren kreeg ik te horen dat ik mijn studie niet in Groningen zou kunnen afronden: de master Bedrijfskunde zou worden opgeheven. De enige en logische keus op dat moment was om verder te gaan met een master Econometrie. Met dat in mijn hoofd ben ik een jaar geleden verder gegaan met de bachelor wiskunde.

Om een bachelor af te ronden moet je een scriptie schrijven. Mijn interesse ging uit naar financiële wiskunde, dus heb ik een scriptie op dat gebied geschreven. Mijn scriptie begeleider vroeg zich af waarom ik verder ging studeren in Groningen, omdat er geen financiële wiskunde wordt aangeboden. Ik had eigenlijk nog nooit nagedacht over een master op een andere universiteit. Toen ik meer informatie had over de Master Financial Engineering and Management, wist ik het zeker: ik zou na vier jaar weer terug gaan naar Twente...

De laatste loodjes van de bachelor wiskunde verliepen soepel, maar natuurlijk niet zonder de nodige stress. Uiteindelijk heb ik vòòr 1 september 2008 alles kunnen afronden en mag ik me nu Bachelor of Science noemen.

Ik was in de zomer al druk met een kamer en de vakken in Enschede. Vier dagen voor het begin van het nieuwe collegejaar kwam ik erachter dat er nog een master Financial Engineering (FE) bestaat; als track bij Applied Mathematics. De vakken die in deze master worden aangeboden wou ik ook graag volgen, ik had me dus ingeschreven voor de verkeerde master! Na een korte mailconversatie met meneer Mandal

(studieadviseur AM) bleek dat ik me gewoon kon inschrijven voor de vakken bij wiskunde, niets aan de hand dus. Dit heb ik dan ook gedaan en ik heb inmiddels mijn eerste tentamens erop zitten.

Het eerste kwartiel was voor mij veel herhaling: statistiek en kansrekening, investment science en functionaal analyse. Ik vind de herhaling wel fijn, want dan heb je alle kennis weer opgehaald. Op dit moment ben ik net begonnen met de vakken PDE en Mathematical finance en de vakken Applied functional analysis en Mathematical theory of probability and statistics worden vervolgd. De onderwerpen die nu worden behandeld zijn (gelukkig) grotendeels nieuw voor mij. Ik vind het erg leuk om weer 'echte' wiskundevakken te volgen. Econometrie is toch wel erg veel toepassing en ik dat vind ik toch minder leuk. Het feit dat FE een tweejarige master is, was voor mij ook een reden om ervoor te kiezen. De master Econometrie in Groningen is eenjarig, dat betekent dat je maar vier vakken volgt. Ik vond dit te weinig. Ik wil ook nog erg graag naar het buitenland. In het tweede semester van het tweede jaar moet je verplicht stage lopen en afstuderen bij een bedrijf. Dit is voor mij de mogelijkheid om naar het buitenland te gaan. In Groningen zou dit niet meer gelukt zijn.

Ik vergelijk erg veel met Groningen, maar het grootste verschil vind ik de docenten van de vakken bij FE. Deze zijn over het algemeen 'beter' dan in Groningen. En de campus, dat kennen we ook niet in Groningen. Ik woon er zelf niet, maar ik vind het wel ideaal: alles zit er. Daarbij wordt activisme ook gestimuleerd in Twente. Ik heb zelf bestuur gedaan bij studievereniging VESTING in Groningen. Dit betekent dat de studie een jaar op een laag pitje staat, maar dit werd door docenten niet altijd gewaardeerd. En dan tot slot: het studentenleven. Tja dat is natuurlijk niet te vergelijken: er gaat niets boven Groningen!



## Stageverslag: Visuele Overweg Monitoring (VOM)

De titel van mijn onderzoek luidt, zoals de titel van dit document; Visuele Overweg Monitoring. Met overweg wordt dan bedoeld op spoorwegovergangen in Nederland. Ik loop mijn stage namelijk bij Strukton Systems in Hengelo.



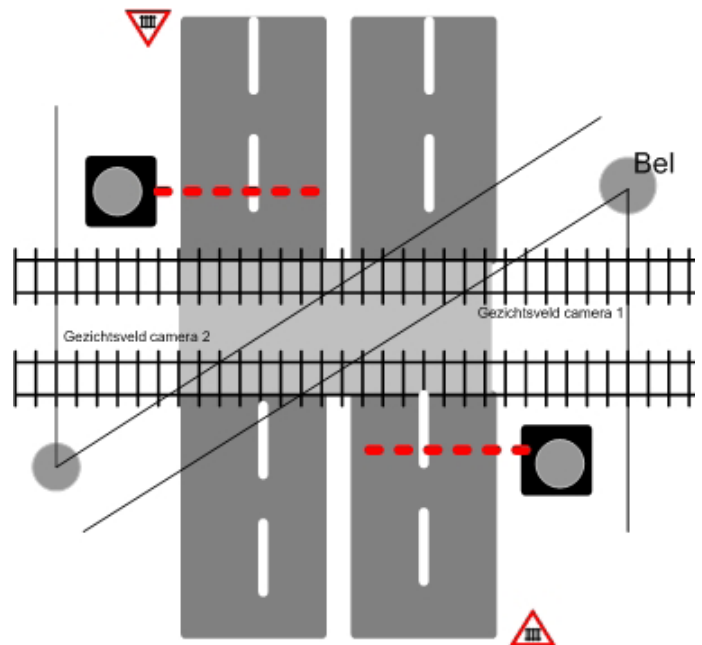
Roel de Jong  
Applied Mathematics,  
track Systems & Control

Allereerst een stukje over Strukton. Strukton is een railinfra bedrijf dat zich bezig houdt met ontwikkeling en onderhoud op het spoor. Het bedrijf is ontstaan als een bouwbedrijf van de NS dat een aanneemer zocht voor een nieuw gebouw. Toen is besloten om deze bouw in eigen hand te houden toekomstige werkzaamheden ook zelf te doen. Er zijn binnen Strukton vele takken waaronder de tak, Strukton Systems. Hier houdt men zich bezig met het ontwikkelen van meet- en regelsystemen.



Figuur 1: spoorwegovergang

Mijn opdracht richt zich op een van die systemen om precies te zijn op VOM. Binnen Strukton is er een pilot systeem ontwikkeld dat camera beelden kan analyseren van een spoorwegovergang. De mogelijkheden die tot nu toe aanwezig zijn, zijn detecteren van treinen en verkeer als eveneens het verloop van de slagboom. Dit programma draait momenteel nog in pilot fase. Er staan twee camera's bij een spoorwegovergang in Koekange. Deze zenden beelden door naar een server welke in Hengelo staat. Via het programma kunnen dan de beelden geanalyseerd worden.



Figuur 2: concept opstelling VOM

Uiteindelijk moet het programma op locatie geïmplementeerd worden. Dit houdt in dat het programma op locatie kan draaien. De camera wordt in de bel bij de slagboom geplaatst. Daarom moet het programma zo min mogelijk CPU vermogen kosten. Het doel is dat alleen alarm statussen doorgegeven worden en het rekenwerk allemaal op locatie gebeurt. Hier komt mijn opdracht om de hoek kijken. Ik houd me bezig om algoritmes te ontwerpen binnen Matlab zodat deze geïmplementeerd kunnen worden op locatie.

Om enigszins meer inzicht te geven in het programma zal ik dit nu toelichten. Alles wat gedetecteerd wordt is gebaseerd op beweging. De meest simpele manier om beweging te zien is twee frames van elkaar af te halen

$$beweging = |frame[i] - frame[i-1]| .$$

Een groot nadeel hiervan is dat als een voertuig langs rijdt die egaal gekleurd is (wat over het algemeen vaak voorkomt) hier alleen de contouren van zichtbaar blijven dit terwijl je liever de hele auto in beeld ziet.

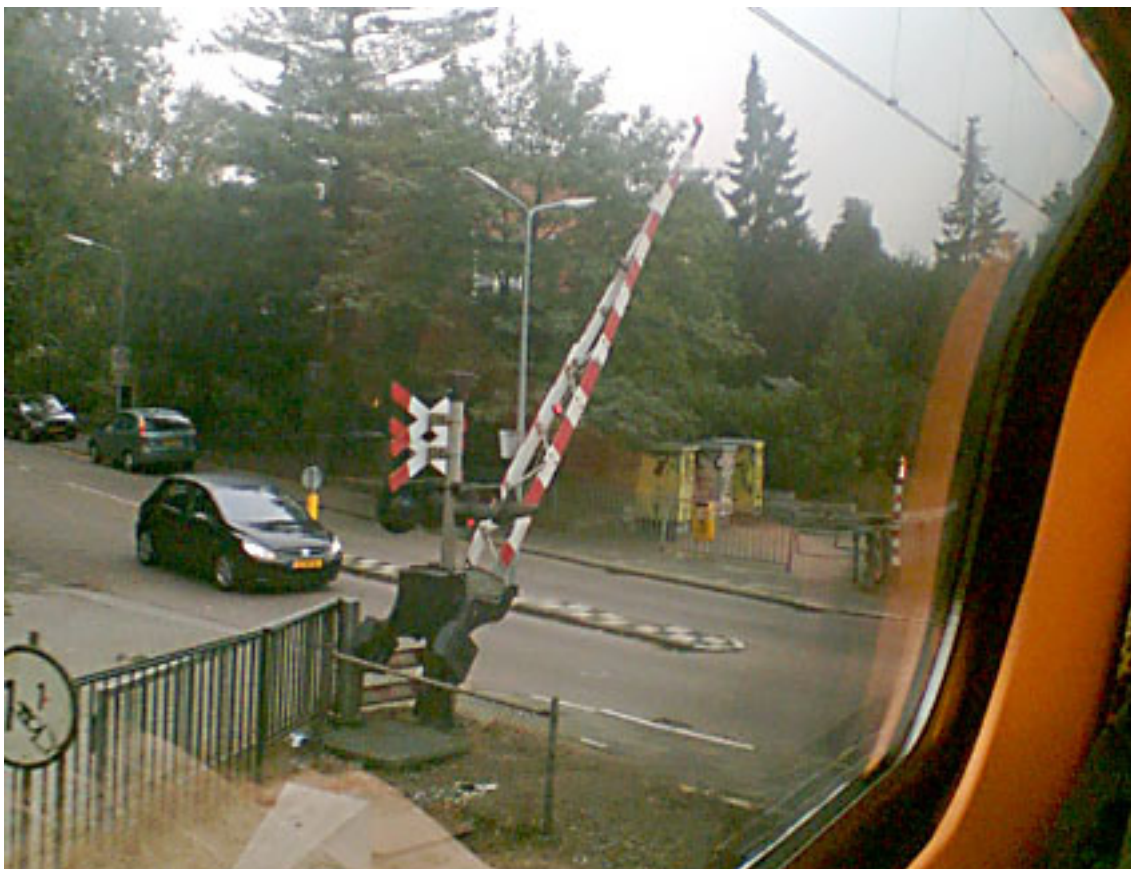
Het liefst zie je als achtergrond een lege weg waar niets op te zien is, als in dit geval een auto voorbijrijdt steekt deze auto volledig tegen de achtergrond af hierdoor is het duidelijk te zien dat er een voertuig aanwezig is. Om te voorkomen dat ook het bewegen van bomen wordt gezien als beweging van een voertuig wordt gebruik gemaakt van een threshold waarde. Als het verschil tussen de achtergrond en het huidige frame boven deze threshold komt dan komt op deze plaats een 1 te staan. Het gevolg is dat er een matrix ontstaat met nullen en enen. Door te kijken naar een bepaald gebied (het gebied



van de meetlus) van deze matrix kunnen we kijken naar voor hoeveel procent een meetvlak is gevuld. Hiermee kan gekeken worden of er daadwerkelijk een voertuig is gepasseerd of dat er ruis is waargenomen. Als we twee meetlussen neerleggen met een bekende afstand ertussen kunnen we de snelheid van het voertuig bepalen. Door te kijken naar het percentage vulling en naar de snelheid kan onderscheid gemaakt worden tussen een fietser of een auto.

Een andere check die is ingebouwd is de slagboomdetectie. Want een resultaat zoals in de figuur hier is natuurlijk niet wenselijk. Het programma kijkt naar het gebied van de slagboom en legt hier een masker over de punten heen. Het masker wat het beste over de punten heen gelegd kan worden komt overeen met de hoek van de slagboom. Als de hoek dus groter is dan 0 graden en er komt een trein langs, dan is er iets goed mis. Doordat men weet hoe lang de slagboom er normaal over doet kan men ook bepalen of er iets gaat, bijvoorbeeld dat de slagboom er langer over doet. Hier kan dan een waarschuwing aangegeven worden zodat de gebruiker door middel van de beelden kan interpreteren of er daadwerkelijk iets mis is, of dat er bijvoorbeeld door harde wind de slagboom er langer over gedaan heeft.

Het continu leggen van een masker over de punten kost veel kracht, dit is opgelost door te kijken naar de kleinste kwadraten methode. Omdat de punten vrijwel op een lijn liggen (daar gaan we vanuit) kan gemakkelijk de hoek bepaald worden waarin de slagboom zich bevindt. Als de slagboom door vandalen vernield is dan zal de snelheid waarmee de boom daalt en zijn lengte anders zijn waardoor er een waarschuwingssignaal afgegeven kan worden. Naast het versnellen van algoritmes bestaat mijn opdracht voor een deel ook uit het uitbreiden van het programma bijvoorbeeld kijken naar voertuigen die stilstaan op de overweg, slingergedrag tussen de bomen door als de slagbomen gesloten zijn. Ook de eerder genoemde uitbreiding van de verkeersdetectie om onderscheid te maken tussen auto's en fietsers is iets waar ik aan gewerkt heb. Zo zijn er nog meer dingen die ik binnen Matlab wil implementeren, het is echt toegepaste wiskunde en dat maakt deze stage zo leuk.



**Figuur 3:** dit hoort niet te kunnen gebeuren

# PYTHAGORAS

Pythagoras laat inmiddels al weer bijna 50 jaar de leuke en uitdagende kanten van wiskunde zien. Pythagoras is voor jongeren in het middelbaar onderwijs (vanaf ongeveer het dertiende levensjaar), maar daarnaast voor iedereen die geïnteresseerd is in wiskunde. Zes keer per jaar verschijnen in Pythagoras artikelen over wiskunde, spelletjes, breinbrekers, wiskundige problemen en prijsvragen. Elk nummer bevat een mix van makkelijke en moeilijker artikelen, om lekker te lezen of om zelf mee aan de slag te gaan. Zo kunt u hieronder het stuk 'Wiskunde en muziek' lezen uit de uitgave november 2007.

Met Pythagoras maakt u kennis voor 4 euro. Of u abonneert zich met een groep van minstens vijf betalende ontvangers (bv. uw leerlingen) en ontvangt als initiatiefnemer uw eigen exemplaren geheel gratis (bulkabbonement). Kijkt u voor meer informatie over onze abonnementsvormen op: [www.pythagoras.nu](http://www.pythagoras.nu)!

## Stemmingen

Wiskunde en muziek hebben zo veel met elkaar te maken, dat het tot ver in de middeleeuwen als één vak aan de universiteit werd onderwezen. Ook daarna hebben grote wiskundigen, zoals Galilei, Mersenne en Euler, nog belangrijke muziektheorieën ontwikkeld. In dit thema-artikel vertelt wiskundige en pianist Derk Pik over de wiskunde die komt kijken bij stemmingen.

Derk Pik

Stemming van instrumenten is een gecompliceerd onderwerp, waar de fysica, de fysiologie van het oor en deelbaarheid van getallen een rol spelen. De toonladder van de 'gewone' muziek, pop of klassiek, is al zeker een eeuw lang hetzelfde, waardoor het voor ons westerlingen lijkt of 'vals' en 'zuiver' objectieve begrippen zijn. Toch zijn ook andere toonladders in gebruik geweest, en is de huidige stemming van piano's maar één keuze uit vele mogelijke.

### CONSONANT EN DISONANT

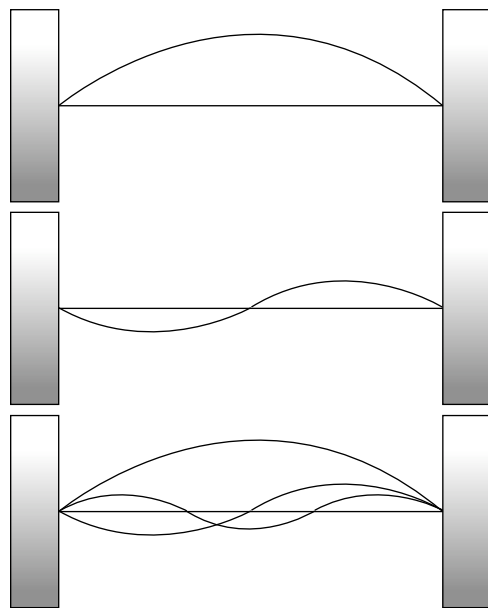
Twee snaren waarvan de twee lengtes een eenvoudige verhouding hebben, klinken goed samen. Deze ontdekking werd vanaf de middeleeuwen toegeschreven aan de school rond Pythagoras. Dit is onjuist, want stemmingen van instrumenten op basis van eenvoudige verhoudingen zijn al te vinden in Babylonische teksten van 3500 jaar oud.

Als je een snaar in trilling brengt, dan zal de trilling er ongeveer uitzien als in figuur 1. Als je de snaar precies in het midden dempt met je vinger, dan neemt de trillende snaar de vorm zoals in figuur 2 aan. De tonen die door de gedempte en de ongedempte snaar worden opgewekt, lijken erg op elkaar en klinken zeer goed samen. We zeggen dat deze twee tonen een octaaf uit elkaar liggen.

Er passen natuurlijk nog veel meer buiken en knopen in de snaar, en het zal bij beluistering steeds opvallen dat deze steeds hogere tonen telkens goed samenklinken met de oorspronkelijke trilling. In feite zullen de trillingen met meer buiken, zie figuur 3, allemaal voorkomen als je een snaar tot trilling brengt door hem aan te strijken of door te plukken. Al deze boventonen bepalen de klankkleur van een geluid en het oor pakt veel van deze boventonen op.

Aan het begin van de zeventiende eeuw ontdekten Marin Mersenne en Galileo Galilei onafhankelijk van elkaar dat toonhoogte en frequentie (het aantal trillingen per seconde) omgekeerd evenredig zijn met elkaar. Ze ontdekten bovendien dat een eenvoudige frequentieverhouding resulteert in *consonantie*: de tonen klinken samen prettig en harmonieus. Een goede verklaring konden ze echter niet geven.

Het antwoord werd gevonden door de componist Jean Philippe Rameau (1683-1764) en de muziektheoreticus Georg Andreas Sorge (1703-1778). *Dissonantie* wordt vooral veroorzaakt door tonen en boventonen met frequenties die vlak naast elkaar liggen, maar net niet gelijk aan elkaar zijn; we ervaren samenklanken als consonant als de klanken veel tonen en boventonen met elkaar gemeen hebben.



Figuur 1 Een snaar in trilling.

Figuur 2 Een snaar in trilling, waarbij precies het midden is gedempt.

Figuur 3 Een trilling met één buik, met twee en met drie buiken.



## SINUSFUNCTIES

Geluid bestaat uit luchttrillingen met een frequentie tussen de 20 en 20.000 keer per seconde (Hertz); andere frequenties hoort het oor niet. Deze variatie in luchtdruk kan worden opgewekt op allerlei manieren, zoals door een snaar, een trillend oppervlak of een fluit.

De eenvoudigste trilling is de *harmonische oscillatie*. Deze vind je overal in de natuur terug waar een systeem uit evenwicht wordt gebracht, terwijl de optredende kracht evenredig is met, en in richting tegengesteld aan de afwijking van de evenwichtstoestand. Neem bijvoorbeeld een spiraalveer waarvan een gewicht hangt. Als je daaraan trekt, is de verlenging van de veer evenredig met de kracht die je uitoefent. Zodra je loslaat, wordt de beweging van het gewicht beschreven door een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0.$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn

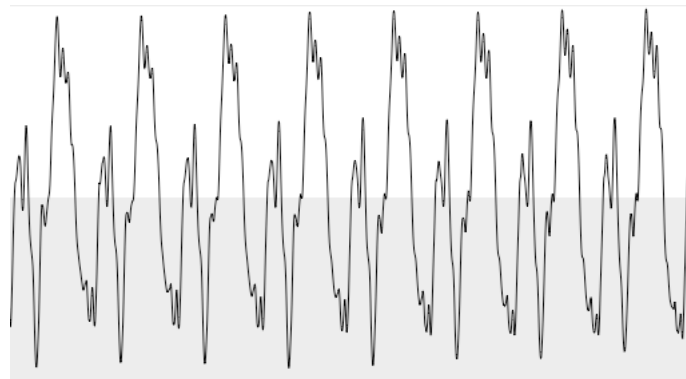
$$x(t) = A \cos(\sqrt{k/m} \cdot t) + B \sin(\sqrt{k/m} \cdot t)$$

met  $A$  en  $B$  willekeurige constanten. Het systeem zal gaan trillen met frequentie  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$

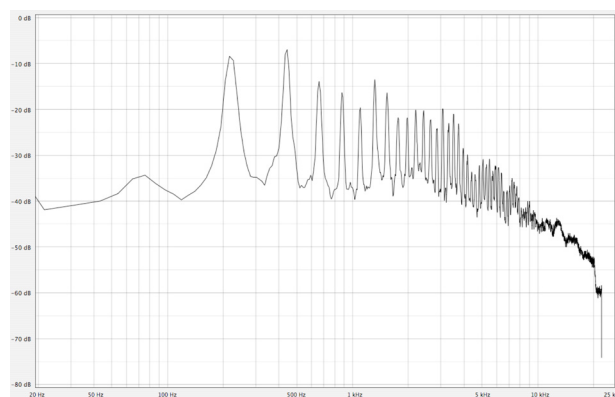
Bij de snaar is de vergelijking wat ingewikkelder, maar hier voldoet als oplossing elke sinusfunctie die een knoop heeft bij het begin en bij het einde van de snaar en ook willekeurige sommen van dergelijke functies. Een snaar zal de lucht laten trillen met allerlei frequenties die elk een geheel veelvoud zijn van de basisfrequentie. Ook bij blaasinstrumenten is de resulterende luchttrilling een som van sinusfuncties die een veelvoud zijn van de basisfrequentie. Bij trommels, pauken en klokken is dit niet zo: dit zijn instrumenten met een tweedimensionaal oppervlak en geven aanleiding tot een heel andere som van frequenties.

Hoe trilt een snaar in het echt? We spelen een  $a$  van 220 Hz op een altviool, nemen dit op met een microfoon en we plotten de spanning in de microfoon, zie figuur 4.

Op het internet zijn gratis programma's te downloaden waarmee je de verschillende frequenties kunt laten zien van een stuk muziek, of van je eigen stem. Zo'n programma geeft het spectrum weer: het neemt een aantal keer per seconde een foto van een klein stukje signaal en kijkt welke frequenties er allemaal in zitten. In figuur 5 is het resultaat te zien van de altviooltoon van figuur 4. De eerste piek is bij 220 Hz, de tweede bij 440 Hz, enzovoorts. Een klarinet zou een heel ander patroon van pieken geven; dit instrument heeft dan ook een heel ander geluid dan een viool.



**Figuur 4** Een gestreken altviooltoon (de  $a$  van 220 Hz). Het patroon herhaalt zich na een grote en een kleine top. Daar tussenin zitten allerlei kleinere topjes, die behoren bij allerlei boventonen.



**Figuur 5** Het spectrum van de gestreken altviooltoon van figuur 4. We zien heel erg veel boventonen. De laagste frequentie is 220 Hz, dan komt een piek bij 440 Hz, dan bij 660 Hz, enz. Je ziet ook dat de frequenties van hogere boventonen dichter bij elkaar gaan liggen (nog afgezien van de logaritmische schaling).

## SOMMEN VAN SINUSFUNCTIES

Bijna alle natuurlijke trillingen zijn opgebouwd uit sommen van de sinusfuncties. Als voorbeeld laten we zien dat de zaagtandfunctie gelijk is aan

$$\frac{4}{\pi} \left( \sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x + \right. \\ \left. - \frac{1}{7^2} \sin 7x + \frac{1}{9^2} \sin 9x - \dots \right).$$

Hoe we een dergelijke reeks berekenen, kunnen we hier helaas niet bespreken; we kunnen wel met grafieken laten zien dat deze formule heel dicht in de buurt komt, zie figuur 6 en 7. Het is een diep wiskundig resultaat dat elke continue periodieke functie willekeurig dicht te benaderen is door een som van sinus- en cosinusfuncties met geheeltallige frequentieverhoudingen.

De benadering van de zaagtandfunctie is ook hoorbaar te maken. Op mijn website (zie het eind van dit artikel voor het adres) staat een geluidsfile, waar de functies van figuur 7 zijn te horen. Telkens wanneer er een sinusfunctie van een hogere frequentie wordt toegevoegd, hoor je eerst even de start van een hogere toon, die spoedig versmelt met het geluid dat je al hoorde: er treedt dus telkens een kleurverandering op.

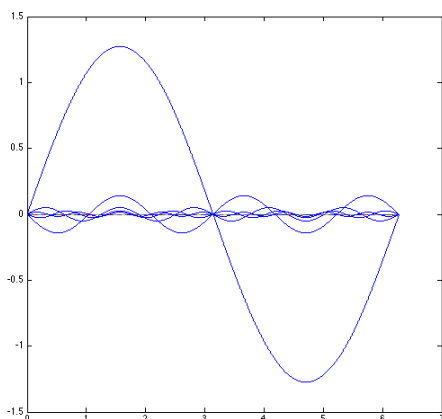
## DISONANTIE

Luchttrillingen komen via ons oor uiteindelijk terecht in het met vloeistof gevulde ‘slakkenhuis’. Als we het slakkenhuis uit zouden kunnen rollen, zien we een lange, taps toelopende buis met een membraan in het midden: het basilair membraan.

Als er twee sinustonen van nabijgelegen frequenties tot klinken worden gebracht, wordt het basilair membraan geforceerd om te trillen met een langzame en sterk wisselende amplitude, zoals in figuur 8. Dit kun je zelf ook ervaren door naar een file op mijn website te luisteren.

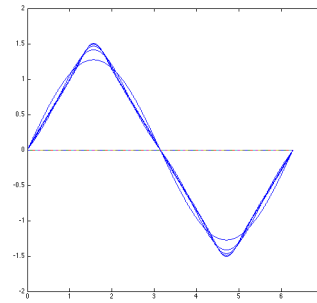
Laten we eerst twee zuivere sinustonen langs elkaar schuiven. De ene blijft constant 220 Hz, de andere gaat van 220 Hz naar de 440 Hz. Eerst hoor je volmaakte consonantie; het zijn gewoon dezelfde tonen, maar spoedig hoor je een akelig, ratelend geluid. De dissonantie is echter ook vrij gauw weer verdwenen. De consonantie die je ervaart, ziet er min of meer uit zoals in figuur 9.

Het feit dat sinustonen die wat verder uit elkaar liggen niet dissoneren, wordt door musici vaak vreemd gevonden; zij verwachten bijvoorbeeld dat een interval dat bijna, maar niet precies een octaaf uit elkaar ligt (frequentieverhouding bijna 1/2), zeer vals zal klinken, net als een ontstemde piano. Ze vergeten dan dat sinustonen en natuurtonen met boventonen heel verschillend zijn.



**Figuur 6**

Een plot van de functies  $\frac{4}{\pi} \sin x, -\frac{4}{\pi} \frac{1}{3^2} \sin 3x, \frac{4}{\pi} \frac{1}{5^2} \sin 5x, -\frac{4}{\pi} \frac{1}{7^2} \sin 7x$  en  $\frac{4}{\pi} \frac{1}{9^2} \sin 9x$  in één grafiek. De amplitude wordt steeds kleiner en de frequentie steeds groter. De som van deze functies benadert de zaagtand, zie figuur 7.



**Figuur 7** Plots van de functies  $\frac{4}{\pi} \sin x, \frac{4}{\pi} (\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x), \frac{4}{\pi} (\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x), \frac{4}{\pi} (\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \frac{1}{7^2} \sin 7x), \frac{4}{\pi} (\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \frac{1}{7^2} \sin 7x + \frac{1}{9^2} \sin 9x)$ .

**De zaagtand wordt steeds beter benaderd; dit blijkt uit het steeds scherper wordende puntje.**

## CONSONANTIE BIJ NATUURLIJKE TONEN

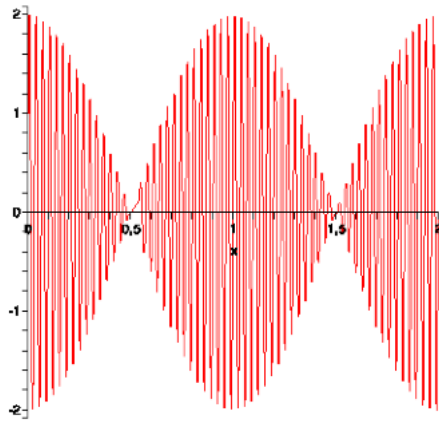
We zagen dat natuurlijke tonen opgebouwd zijn uit sinustonen en dat bij snaar- en blaasinstrumenten de verhouding tussen de frequenties van de sinustonen geheeltallig is. Wat gebeurt er als we twee met de computer gegenereerde zeer zuivere tonen met boventonen van geheeltallige frequentieverhoudingen langs elkaar heen laten schuiven? Eén toon houden we de hele tijd op dezelfde hoogte, dus deze toon bestaat uit de gelijktijdig te horen frequenties 110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880, 990, 1100, 1210, 1320, 1430, 1540 Hz, en de andere toon, die op dezelfde 14 frequenties begint, stijgt langzaam naar de toon 220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1540, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640, 2860, 3080 Hz.

We houden bij beide tonen, dus in het bijzonder bij de bewegende toon, de frequentieverhoudingen geheeltallig. Op elk tijdstip zullen er wel plaatsen zijn waar de boventonen wringen of juist goed samenklanken.

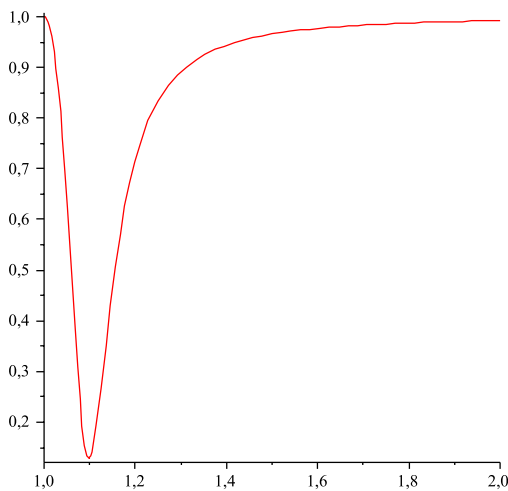
De consonantie kun je in getallen uitdrukken: de consonantiegrafiek van figuur 10 krijg je door op elk moment te berekenen hoe ver de boventonen van elkaar afstaan: alle afstanden krijgen een score van 0 (zeer dissonant) tot 1 (zeer consonant), volgens de grafiek van figuur 9. Al deze waarden tel je bij elkaar op om figuur 10 te krijgen. Bekijk de grafiek ook eens terwijl je naar het geluidsvoorbeeld op mijn website luistert.

De consonantiecurve laat een groot aantal pieken zien; deze zijn bij de verhoudingen 1; 1,1; 1,111; 1,125; 1,143; 1,167; 1,20; 1,222; 1,25; 1,325; 1,4; 1,5; 1,666; 1,75; 1,83; 2, ...

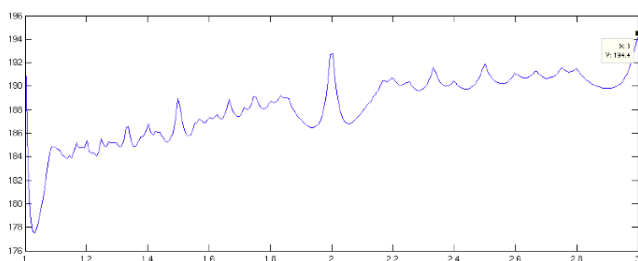




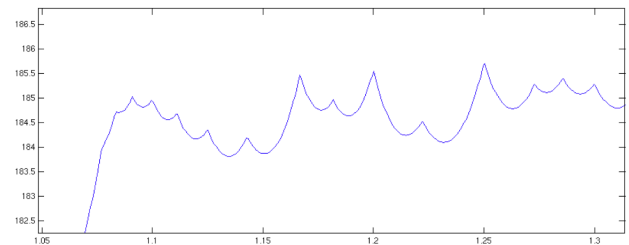
**Figuur 8** Twee sinustonen met bijna dezelfde frequentie.



**Figuur 9** Consonantiecurve van twee sinustonen: één toon blijft liggen en de andere wordt geleidelijk aan twee keer zo hoog. Op de verticale as staat de dissonantie afgezet; 0 is zeer dissonant; 1 is zeer consonant. Op de horizontale as staat de verhouding van de frequentie van de tweede toon ten opzichte van de eerste. Dus als beide tonen beginnen bij 220 Hz, dan is op moment 1,1 de frequentie van de bewegende toon gestegen tot 242 Hz.



**Figuur 10** Consonantiecurve van twee tonen met elk 14 boventonen: we zien heel veel pieken (consonantie) en heel veel dalen (dissonantie).



**Figuur 11** Detail van de consonantiecurve van twee tonen met elk 14 boventonen: we zien in de buurt van de verhouding  $9/8 = 1,125/1$  heel veel pieken (consonantie) en heel veel dalen (dissonantie). Je kunt daar dus op allerlei manieren zuiver spelen.

De meeste van deze verhoudingen zijn eenvoudige ratio's: 1,  $11/10$ ,  $10/9$ ,  $9/8$ ,  $8/7$ ,  $7/6$ ,  $6/5$ ,  $11/9$ , enzovoorts. Dit is niet zo verwonderlijk: als er veel consonantie is, past ergens een boventoon van de ene klank echt op een boventoon van een andere. In dat geval zijn er ook meteen allerlei andere veelvouden van die boventoon die precies op een andere passen. Een aantal van deze verhoudingen komt n onze westerse muziek algemeen voor: onze toonladders zijn er op gebouwd; vele andere verhoudingen zijn in de westerse muziek totaal onbekend. Bewustwording van deze samenklanken biedt nieuwe mogelijkheden voor hedendaagse muziek.

We kunnen ook nog iets anders uit de grafiek in figuur 10 concluderen. Als we inzoomen op bijvoorbeeld het gebied rond de verhouding  $9/8$  (dat is op een piano ongeveer de afstand tussen een c en een d), dan zien we vele kleine pieken, zie figuur 11. Dit betekent dat er in de buurt van deze toonsafstand meerdere min of meer zuivere intervallen liggen, die allemaal ongeveer de grootte hebben van de verhouding  $9/8$ . Zuiver zingen en zuiver spelen kan dus eigenlijk op vele manieren.

We kunnen concluderen dat voor snaar- en blaasinstrumenten en zang consonantie optreedt bij eenvoudige ratio's.



**Figuur 12** Het octaaf, de (onzuivere) reine kwint en grote terts op de piano. Deze intervallen corresponderen met de frequentieverhoudingen van  $2/1$ , van ongeveer  $3/2$  en ongeveer  $4/3$ . Merk op dat het octaaf acht witte toetsen omvat, de kwint 5 en de terts 3.

### DE PYTHAGOREÏSCHE STEMMING

De muziek waaraan wij nu, hier in het Westen, gewend zijn, heeft akkoorden die over het algemeen zeer veel verschillende tonen bevatten. Maar tot ver in de middeleeuwen vormden het octaaf met verhouding 1/2 en de kwint met verhouding 3/2 de basis voor alle stemmingen. De grote terts zoals wij die nu kennen, werd destijds als vals ervaren.

De middeleeuwse gevoeligheid voor zuivere intervallen legde de componisten van zangmuziek grote beperkingen op. Neem als voorbeeld het Kyrie van de Messe de Nostre Dame van Guillaume de Machaut (1300-1377). In dit stuk voor a capella zang (zang zonder begeleiding van instrumenten) worden 9 (van de 12) verschillende tonen gebruikt, die allemaal vanuit de basistoon d zijn geconstrueerd met de kwintverhouding 3/2, zie figuur 13.

De stemming waarbij alle tonen door middel van de twee verhoudingen 2/1 en 3/2 zijn geconstrueerd, heet de Pythagoreïsche stemming. Daar zijn kwinten (3/2) zuiver en tertsen (81/64) relatief onzuiver. In de Messe de Nostre Dame, die wordt gezongen in Pythagoreïsche stemming, komen desondanks enkele grote tertsen voor. Dit is echter altijd ergens in het midden van een zin en het veroorzaakt een zekere spanning. Elke zin eindigt met de consonantie van de kwint.

### JUISTE INTONATIE

De Pythagoreïsche toonladder heeft drie intervallen die grote getallen in hun frequentieverhouding hebben. We laten dit zien met de Pythagoreïsche toonladder van c, zie de bovenste tabel van figuur 14.

We kunnen bijvoorbeeld de toon e (81/64) met de verhouding 80/81 verlagen om het veel eenvoudigere quotiënt  $81/64 \cdot 80/81 = 5/4$  te krijgen.

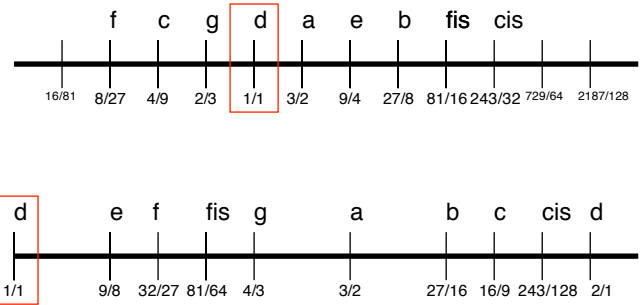
De frequentieverhouding 80/81 heet de syntonische komma. Als we dit ook doen bij de a en de b, dan krijgen we de onderste tabel van figuur 14, die veel eenvoudiger is. Hier klinken alle intervallen zeer zuiver. Elke stemming die gebaseerd is op dergelijke eenvoudige verhoudingen, heet juiste intonatie. Merk op dat nu ook de factor 5 in drie breuken voorkomt.

toon	c	d	e	f	g	a	b	c
ratio	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1

toon	c	d	e~	f	g	a~	b~	b
ratio	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

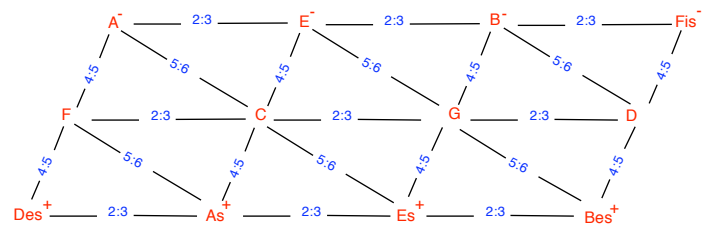
**Figuur 14** Boven de Pythagoreïsche toonladder van c, onder een toonladder van juiste intonatie



**Figuur 13** De toonladder van de Messe de Nostre Dame van Guillaume de Machaut. In de bovenste tonenrechte zijn de tonen geconstrueerd volgens de verhouding 3/2. Zo is de frequentieverhouding tussen de a en de d gelijk aan 3/2. De frequentieverhouding tussen de middeleeuwse) fis en de d is 81/16. In de onderste grafiek brengen we de tonen door octaafsprongen zo dicht mogelijk boven de d, door een aantal keer door 2 te delen of met 2 te vermenigvuldigen. Zo heeft de e op de bovenste lijn een verhouding 9/4 tot de basis-d, en een octaaf lager heeft de e de verhouding 9/8 tot de basis-d. De grote (middeleeuwse) terts fis - d heeft de verhouding 81/64.

### STEMSCHEMA'S

Zoals te zien is op de piano in figuur 12, heeft een piano twaalf verschillende (zwarte en witte) toetsen. In onze tabel staan maar zeven verschillende tonen. De vijf tonen die niet in bovenstaande tabel voorkomen, zijn precies de zwarte toetsen. Je kunt deze tonen ook weer met de verhoudingen 3/2 en 5/4 toevoegen. We krijgen dan bijvoorbeeld het stemschema in figuur 15.



**Figuur 15** Stemschema uit Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines (1615) van Salomon de Caus. Dit schema verscheen in 1636 als Spinetstemming I in Harmonie Universelle (1636-37), van de wiskundige Marin Mersenne. Op elke horizontale regel staan reine kwinten; een stap schuin naar rechtsboven is een grote terts, een stap naar rechtsonder is een kleine terts.

Wat is er goed en wat is er slecht aan dit stemschema? Alle intervallen die met weinig stappen te bereiken zijn, klinken erg zuiver. In het bijzonder zijn alle grote en kleine drieklanken, voorgesteld als driehoeken in het diagram, zuiver. Toch moet je voor deze zuiverheid duur betalen: de 'kwint' Fis-



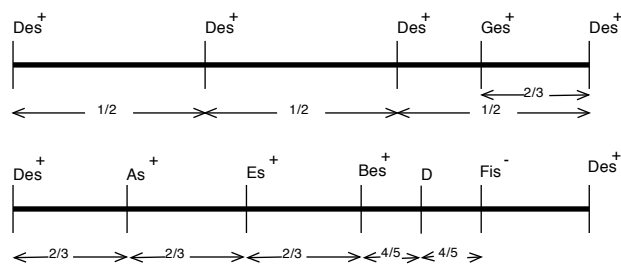
Des<sup>+</sup> is erg onzuiver.

In figuur 16 lezen we af dat

$$\frac{\text{lageDes}^+}{\text{hogeGes}^+} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} = 0,1875,$$

$$\frac{\text{lageDes}^+}{\text{hogeFis}^-} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{675} \approx 0,1896.$$

Dit is een afwijking van meer dan een honderdste, en dat is echt heel vals. Als men de Fis<sup>-</sup> wat naar beneden kon brengen, dan zou het interval Des<sup>+</sup> - Fis<sup>-</sup> zuiverder worden. Door alle kwinten, die nu met verhouding 2/3 zo zuiver mogelijk zijn, een beetje kleiner te maken, kan men stemmingen produceren waar niet speciaal één interval bijzonder veel valser is dan de andere. Dergelijke stemmingen noemt men getempereerde stemmingen. De meeste musicologen denken dat de stemming van Das Wohltemperierte Klavier van Bach ook met dergelijke stemming gespeeld moet worden. Op dit moment is er een spannend debat gaande of de titelpagina van het manuscript het stemschema bevat, zie bijvoorbeeld <http://bach.tuning.googlepages.com>.



**Figuur 16** Het valse interval van de stemming in De Caus en Mersenne. Je zou willen dat de verhouding tussen de lage Des<sup>+</sup> en de hoge Ges<sup>+</sup> gelijk is aan 3/16, maar door het zuiver stemmen van de tertsen is de Ges<sup>+</sup> eigenlijk een Fis<sup>-</sup>. De verhouding tussen de lage Des<sup>+</sup> en de hoge Fis<sup>-</sup> is 128/675: een heel lelijke verhouding.

### GELIJKZWEVENDE STEMMING

De piano, zie figuur 12, heeft twaalf verschillende toetsen; als je bijvoorbeeld vanaf de laagste toets twaalf keer een kwint stapelt, kom je weer bij dezelfde toets uit, maar dan zeven octaven hoger. Dus: 12 kwinten zijn gelijk aan 7 octaven. Als je dit met frequentieverhoudingen uitrekent, blijkt dit niet precies te zijn.

In frequenties: als je twaalf keer een reine kwint op een andere reine kwint stapelt (je construeert dus de verhouding  $(3/2)^{12}$ ) krijg je ongeveer dezelfde toon als wanneer je zeven keer een octaaf bovenop elkaar zet, met verhouding  $(2/1)^7$ . In vergelijking:

$$(3/2)^{12} = 129,746 \approx 128 = (2/1)^7.$$

Het quotiënt van deze frequentieverhouding,  $3^{12}/2^{19}$ , heet de *Pythagoreïsche komma*. Op de piano zijn octaven zuiver, dus op de piano kan geen enkele kwint zuiver zijn. Hoe zit dit precies?

Aan het eind van de achttiende eeuw werd de behoefte om in elke toonsoort even zuiver te kunnen spelen zo groot, dat men er toe overging alle intervallen even onzuiver te maken. Het idee achter deze stemming is afkomstig van Vincenzo Galilei, de vader van Galileo Galilei. De stemming werd echter eeuwenlang niet toegepast.

In een octaaf zitten twaalf tonen. Stel, de verhouding tussen elke twee opeenvolgende tonen is het getal  $r$ . Dan is bijvoorbeeld de afstand tussen de  $c$  en de  $c'$  één octaaf hoger, gelijk aan

$$\begin{aligned} \frac{c}{c'} &= \frac{c}{cis} \cdot \frac{cis}{d} \cdot \frac{d}{dis} \cdot \frac{dis}{e} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{fis} \\ \frac{1}{2} &= \frac{fis}{g} \cdot \frac{g}{gis} \cdot \frac{gis}{a} \cdot \frac{a}{aïs} \cdot \frac{aïs}{b} \cdot \frac{b}{c} = r^{12}. \end{aligned}$$

Dit resulteert in

$$r = \sqrt[12]{1/2} \approx 0,943874.$$

Met dit kleinste interval als basis stemt men nu piano's. Deze stemming heet de *gelijkzwevende stemming*. De kwint is met deze stemming aan de schrale kant:  $r^7/1 \approx 1/1,4983$ ; nu, in onze moderne tijd, zijn we er echter helemaal aan gewend. Alleen wanneer je een keer een hele middag geconcentreerd naar middeleeuwse muziek hebt geluisterd, kun je nog wel eens schrikken van al die valse muziek om je heen.

### INTERNET EN VERDER LEZEN

Op mijn website [www.math.leidenuniv.nl/~drpik](http://www.math.leidenuniv.nl/~drpik) staan geluidsvoorbeelden. De website [www.csounds.com](http://www.csounds.com) biedt een gratis 'state of the art' synthesizer om geluiden op te wekken met je computer. Ideaal voor experimenten. Het kost enige moeite om het te leren, maar er zijn erg veel voorbeelden op het web te vinden. Er zijn ook componisten die er elektronische muziek mee maken.

Het Engelstalige boek *Music: a mathematical offering* door David Benson stond al vele jaren op het net; het is mijn favoriete boek op het gebied van wiskunde en muziek en het is dit jaar in druk verschenen bij Cambridge.

# Geluidsbelasting rond Schiphol

Veel problemen in het dagelijks leven zijn zowel stochastisch als dynamisch van aard. Stochastisch, omdat we vaak niet kunnen voorspellen wat er precies gaat gebeuren. Dynamisch, omdat we vaak niet eenmalig een beslissing nemen, maar dat er meerdere beslismomenten zijn. De theorie van Stochastisch Dynamisch Programmeren levert methoden om optimale beslissingen te nemen in situaties met onzekerheid en herhaalde beslissingen. Een voorbeeld hiervan is de geluidsbelasting rond Schiphol.

Tristan Meerburg

Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium

## Geluidsverdeling

De luchthaven Schiphol is een belangrijke motor voor de Nederlandse economie. Schiphol wil graag groeien. Dit gaat echter ten koste van de omwonenden, die te kampen krijgen met meer geluid van overvliegende vliegtuigen. Om dit geluid eerlijk te verdelen over de omgeving van Schiphol wordt gebruik gemaakt van 35 *handhavingspunten*. Op jaarbasis mag op zo'n punt een vooraf vastgestelde totale geluidsbelasting niet worden overschreden, en overschrijding kan leiden tot een boete of zelfs tot sluiting van start- en landingsbanen.

---

Er staan 35 emmers rond Schiphol. Ieder startend en landend vliegtuig op Schiphol druppelt een hoeveelheid atter in de emmers. Aan het einde van het jaar mag geen van de emmers overstromen.

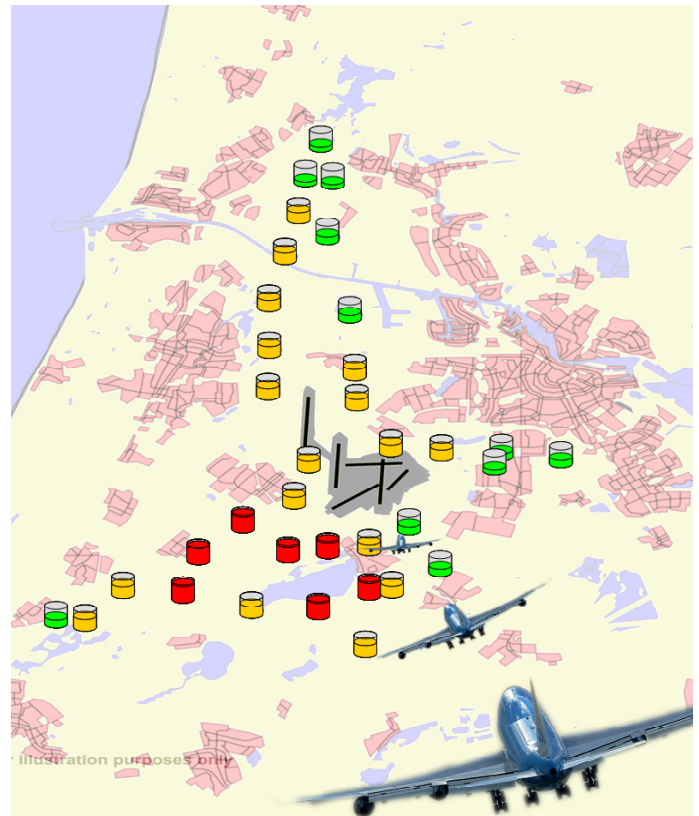
---

Schiphol zal haar baancapaciteit strategische willen inzetten om binnen de geluidsnorm te blijven. Het grote probleem hierbij is dat het weer in Nederland heel grillig kan zijn - denk maar aan afgelopen zomer. Toch moet iedere maand een keuze gemaakt worden voor het inzetten van de start- en landingsbanen rekening houdend met die onzekerheid in het weer gedurende de rest van het jaar.

---

Gedurende het jaar moeten de emmers gelijkmatig volstromen, anders lopen we aan het einde van het jaar het risico geen druppels meer kwijt te kunnen in belangrijke emmers.

---



Om grip te krijgen op de ontwikkeling van geluid in de handhavingspunten worden referentielijsten opgesteld. Dit zijn geordende lijsten van baancombinaties die in te zetten zijn op Schiphol. Hoe hoger een baancombinatie in deze lijst voorkomt, hoe kleiner de kans is dat met die baancombinatie de geluidsnorm ergens overschreden wordt. Om veiligheidsredenen mogen sommige baancombinaties niet gebruikt worden, afhankelijk van vooral de wind. De daadwerkelijk te vliegen baancombinatie uit de preferentielijst hangt dus af van het weer.

---

In het voorbeeld willen we het liefst de emmers in het noorden vullen. Een preferentielijst zal opgesteld worden waarmee meer in het noorden zal worden gevlogen en wat minder in het zuiden.

---

Een belangrijk probleem is het iedere maand opstellen van de preferentielijst die de kans op overschrijding minimaliseert. oor de laatste maand is dit eenvoudig. Op dat tijdstip kennen we namelijk de gerealiseerde geluidsbelasting in alle handhavingspunten.

Je kan je voorstellen dat het niet eenvoudig is om de beste preferentielijst op te stellen voor de eerste maand van het jaar. Dan weten we immers nog helemaal niets van de mogelijke ontwikkeling in het weer en de beslissingen in latere maanden.



### Wiskundige aanpak

De wiskundige oplossing voor dit probleem vinden we met behulp van Stochastisch Dynamisch Programmeren. Deze techniek is bruikbaar voor zeer complexe problemen, zolang een opdeling mogelijk is van vergelijkbare subproblemen.

Preferentielijsten worden iedere maand opgesteld gebaseerd op de gerealiseerde geluidsbelasting in de handhavingpunten, de beschikbare baancombinaties en de verwachting van het weer gedurende de rest van het jaar. De gerealiseerde geluidsbelasting aan begin van maand  $n$  is de *toestand* van het systeem op tijdstip  $n$ . De *beslissing* op tijdstip  $n$  is de keuze voor een opgestelde preferentielijst. Bij iedere beslissing wordt de ontwikkeling van de geluidsbelasting bepaald door het weer. Aangezien het weer onzeker is, wordt de overgang naar een toestand op tijdstip  $n+1$  gegeven door *overgangskansen*.

Even iets technischer! Laat de verzameling van alle toestanden op tijdstip  $n$  gegeven worden door  $S_n$  en de verzameling mogelijke beslissingen door  $D_n$ . Als we ons in maand  $n$  bevinden en we nemen beslissing  $d$  uit  $D_n$ , dan is de kans dat er  $x$  geluidsbelasting bijkomt in de handhavingpunten  $p_{n,d}(x)$ . Met deze notatie kan een algoritme bestudeerd worden dat in staat is de optimale strategie te vinden. De grootheid  $f_n(i)$  is de verwachte minimale kans van overschrijden vanuit toestand  $i$  met nog  $12 - n$  maanden te gaan. Het interessante hieraan is dat  $f_n$  eenvoudig is uit te drukken in  $f_{n+1}$ :

$$f_n(i) = \min_{d \in D_n} \left[ \int f_{n+1}(x+i) p_{n,d}(x) dx \right], i \in S_n.$$

De kansen  $f_{12}(i)$  aan het einde van het jaar worden voor elke  $i$  bekend verondersteld: er zijn dan geen beslissingen meer om te nemen. Vanuit  $f_{12}$  kan nu  $f_{11}$  berekend worden, dan  $f_{10}$ , enzovoorts; het probleem is opgedeeld. Dit principe van *achterwaartse recursie* heet dynamisch programmeren. Het produceert weloverwogen beslissingen aangezien het de onzekerheid en de beslissingen in de toekomst meeneemt in de berekening; het kan voor veel problemen de optimale strategie berekenen. Uiteindelijk geeft  $f_0$  de overschrijdingskans en de optimale beslissing aan het begin van het jaar - daar waren we naar op zoek.





