TWENTE'S GOT TALENT

Videoles Discrete dynamische modellen

mede mogelijk gemaakt door
provincie Overijssel

Discrete dynamische modellen

Orientatie — **Puzzelen met rijtjes**

Algebraisch — **Rijen en reeksen**

Algebraisch/numeriek — **Differentie vergelijkingen**

Numeriek — **Stelsels differentie vergelijkingen**

Maak de volgende rijtjes af:

a. 2 – 4 – 6 – 8 – 10 -

b. 1 – 2 – 4 – 8 – 16 -

c. 1 – 2 – 5 – 14 – 41 -

d. 1 – 4 – 9 – 16 - 25 -

e. 1 – 1 – 2 – 3 – 5 -

f. 2 – 3 – 5 – 7 – 11 -

g. 3 – 1 – 4 – 1 – 5 -

h. 1 – 3 – 6 – 10 -

Antwoord:

a. 2 – 4 – 6 – 8 – 10 –

Antwoord:

a. 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14

want:

$a_{n+1} = a_n + 2$ met $a_1 = 2$ (Recursieve formule)

of

$a_n = 2 \cdot n$ (Directe formule)

Antwoord:

b. 1 – 2 – 4 – 8 – 16 –

Antwoord:

b. 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64

want:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n \text{ met } a_1 = 1$$ (Recursieve formule)

of

$$a_n = 2^{n-1}$$ (Directe formule)

Antwoord:

c. 1 – 2 – 5 – 14 – 41 –

Antwoord:

c. 1 – 2 – 5 – 14 – 41 – 122 - 365

want:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1 \text{ met } \quad a_1 = 1 \quad \text{(Recursieve formule)}$$

of

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot (3^n + 3) \qquad \text{(Directe formule)}$$

Antwoord:

d. 1 – 4 – 9 – 16 - 25 –

Antwoord:

d. 1 – 4 – 9 – 16 - 25 – 36 – 49

want:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$$ (Recursieve formule)

of

$$a_n = n^2$$ (Directe formule)

Antwoord:

e. 1 – 1 – 2 – 3 – 5 –

Antwoord:

e. 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 - 34

want:

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (Recursieve formule)

in Woord formule:

nieuw getal is som twee vorige getallen

Er bestaat ook een Directe formule

Antwoord:

f. 2 – 3 – 5 – 7 – 11 –

Antwoord:

f. 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 23 - 29

want:

in Woord formule:

nieuw getal is volgende priemgetal

Er bestaat geen Directe formule en

ook geen Recursieve formule

Antwoord:

g. 3 – 1 – 4 – 1 – 5 –

Antwoord:

g. 3 – 1 – 4 – 1 – 5 – 1 – 6 – 1 – 7

want:

in Woord formule:

nieuw getal is vorige getal :3 +3 :4 +4 :5 +5 enz.

of

Antwoord:

g. 3 – 1 – 4 – 1 – 5 – 9 – 2 – 6 – 5

want:

in Woord formule:

nieuw getal is volgende decimaal van π

Antwoord:

h. 1 – 3 – 6 – 10 –

Antwoord:

h. 1 – 3 – 6 – 10 – 15 – 21 – 28 -36

want:

$a_{n+1} = a_n + n$ met $a_1 = 1$ (Recursieve formule)

Verschil is 1, 2, 3, 4, enz. (Woordformule)

$$a_{n+1} = \frac{(n^2 + n)}{2}$$ (Directe formule)

of

Antwoord:

h. 1 – 3 – 6 – 10 – 12 – 6 – -17 – -69

want:

$$a_{n+1} = \frac{1}{8}(-n^4 + 10 \cdot n \;\; - 31 \cdot n^2 + 54 \cdot n - 24)$$

(Directe formule)

of

Antwoord:

h. 1 – 3 – 6 – 10 – 15 – 21 – 25 – 27

want:

a_{n+1} = "aantal manieren om *n* ogen te gooien met drie dobbelstenen"

(Woord formule)

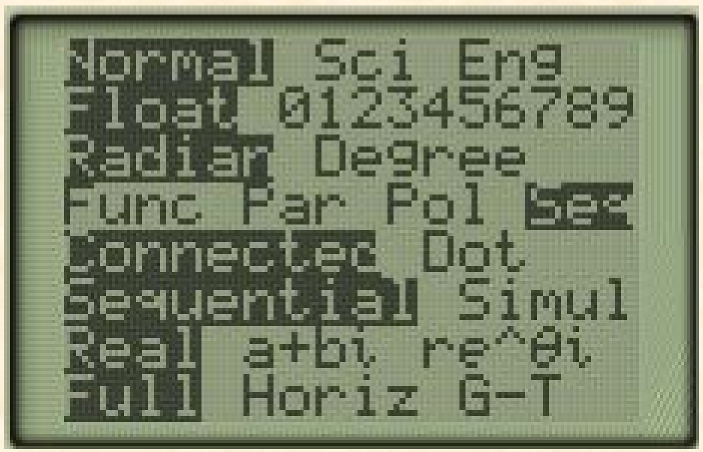
Conklusie:

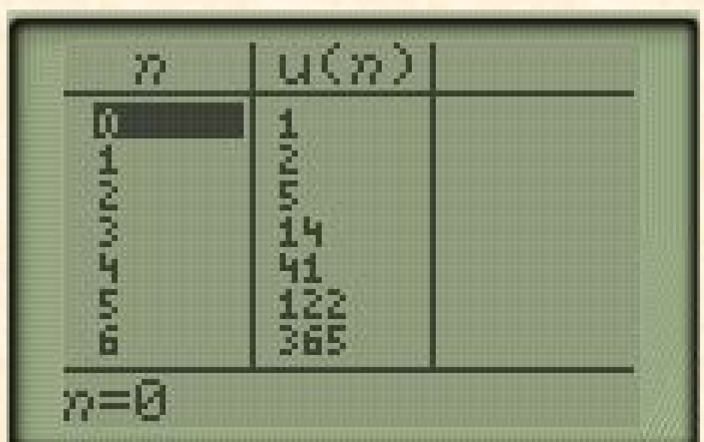
Er zijn altijd een heleboel manieren om een rijtje getallen af te maken.
Alleen liggen sommige manieren minder voor de hand dan andere.

We beperken ons verder tot reeksen van getallen die door een recursieve formule worden beschreven.

Puzzelen met rijtjes

Recursieve formules kunnen in de GR worden ingevoerd. bv. $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2$ met $a_0 = 1$





Enkele bijzondere rijen

1. **Rekenkundige rij** $u_n = u_{n-1} + v$
2. **Meetkundige rij** $u_n = r \cdot u_{n-1}$
3. **"1e orde differentievergelijking"** $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$
4. **Fibonacci reeks** $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
5. **Som rijen** $S_n = S_{n-1} + u_n$

Enkele bijzondere rijen

1. Rekenkundige rij	
Voorbeeld	3,10,17,24,31,38
Recursieve formule	$u_n = u_{n-1} + v$
Directe formule	$u_n = u_0 + v \cdot n$

Bijzondere rijen

2. Meetkundige rij	
Voorbeeld	3,6,12,24,48,96
Recursieve formule	$u_n = r \cdot u_{n-1}$
Directe formule	$u_n = u_0 \cdot r^n$

Bijzondere rijen

3. Lineaire differentievergelijking van de 1e orde (Mengvorm van meetkundige en rekenkundige rij)	
Voorbeeld	2, 5, 14, 41,121…..
Recursieve formule	$u_n = a \cdot u_{n-1} + b$
Directe formule (Bewijs komt later)	$u_n = P \cdot a^n + Q$

Gegeven de recursieve formule $u_n = 3 \cdot u_{n-1} - 1$

met $u_0=2$ dus de rij 2, 5, 14, 41, 122 enz.

De Directe formule $u_n = P \cdot 3^n + Q$

is dan te vinden door 2 getallen in te vullen.

$$u_1 = 2 = P \cdot 3 + Q$$

$$u_2 = 5 = P \cdot 3^2 + Q \quad \Rightarrow P = \frac{1}{2} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2} \cdot (3^n + 1)$$

Bijzondere rijen

4. Fibonacci reeks "Lineaire differentievergelijking van de 2e orde"	
Voorbeeld	1,1,2,3,5,8,13,21,34
Recursieve formule	$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
Directe formule de formule van Binet (Zonder bewijs) $u_n = \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}} - \frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$	

5. Som rijen

Gegeven de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots..u_n$

Wat is dan de som $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n$

Recursief geschreven $S_n = S_{n-1} + u_n$

maar bij Som rijen willen we een Directe formule!

Bijzondere somrijen

a) Som van de rekenkundige reeks

b) Som van de meetkundige reeks

c) Som van de lineaire differentievergelijking van de 1e orde

d) De harmonische reeks

e) De reeks van Euler

f) De reeks van Leibniz

g) De halverings reeks

Bijzondere somrijen

Som van de rekenkundige reeks

Hoe tel je alle termen van een rekenkundige reeks bij elkaar op?

Schrijf de reeks er omgekeerd onder! (blz. 116/117)

Gegeven de rekenkundige rij u_n

Dan geldt: $S_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_n)$

Bijzondere somrijen

Som van de meetkundige reeks

Hoe tel je alle termen van een meetkundige reeks bij elkaar op?

Schrijf de reeks er nog eens onder maar dan alles maal *r*. Trek ze van elkaar af. (blz. 121)

Gegeven de meetkundige rij $u_n = r \cdot u_{n-1}$

Dan geldt: $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$

Tussendoor…..

Bewijs voor de directe formule voor de lineaire differentievergelijking van de 1e orde

Als $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ dan ziet de rij er uit als:

$$u_0, \quad a \cdot u_0 + b, \quad a^2 \cdot u_0 + a \cdot b + b,$$
$$a^3 \cdot u_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b, \ \ldots \ enz.$$

$$u_n = u_0 \cdot a^n + b \cdot (1 + a + a^2 + a^3 \ldots\ldots + a^{n-1})$$

Tussendoor…..

Bewijs voor de directe formule voor de lineaire differentievergelijking van de 1e orde

$$u_n = u_0 \cdot a^n + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a} = (u_0 - \frac{b}{1-a}) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

dus $\quad u_n = P \cdot a^n + Q$

Bijzondere somrijen

De harmonische reeks

Definitie: $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$

De harmonische reeks komt in allerlei problemen voor.

Zoals "De slak en de geit" of "Bruggen bouwen"

Bijzondere somrijen

De harmonische reeks

Definitie: $$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots$$

In de 14^e eeuw ontdekte Nicole Oresme dat de som willekeurig groot kan worden!

Maar dat duurt wél even…

Als je de 20 wilt halen moet je 250 miljoen termen optellen. Als je de 100 wilt halen moet je 1,5 x 10^{43} termen optellen. Over traag gesproken..............

Bijzondere somrijen

De harmonische reeks divergeert!

Het bewijs van Nicole Oresme:

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$S_8 > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Algemeen: $S_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$

De reeks van Euler

Definitie: $$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

Het was de broers Jakob en Johan Bernouilli rond 1700 al bekend dat deze reeks <u>niet</u> divergeert maar naar een vaste waarde nadert.

Het duurde tot 1730 tot Euler aantoonde:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Bijzondere somrijen

De reeks van Gregory-Leibniz

(En waarschijnlijk al bekend in Indie in de 14e eeuw)

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ... = \frac{\pi}{4}$$

Voor berekeningen van π is deze reeks niet geschikt. Het convergeert heel langzaam.

Bijzondere somrijen

De halverings reeks

Definitie: $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots$$

Dit is een gewone meetkundige reeks.

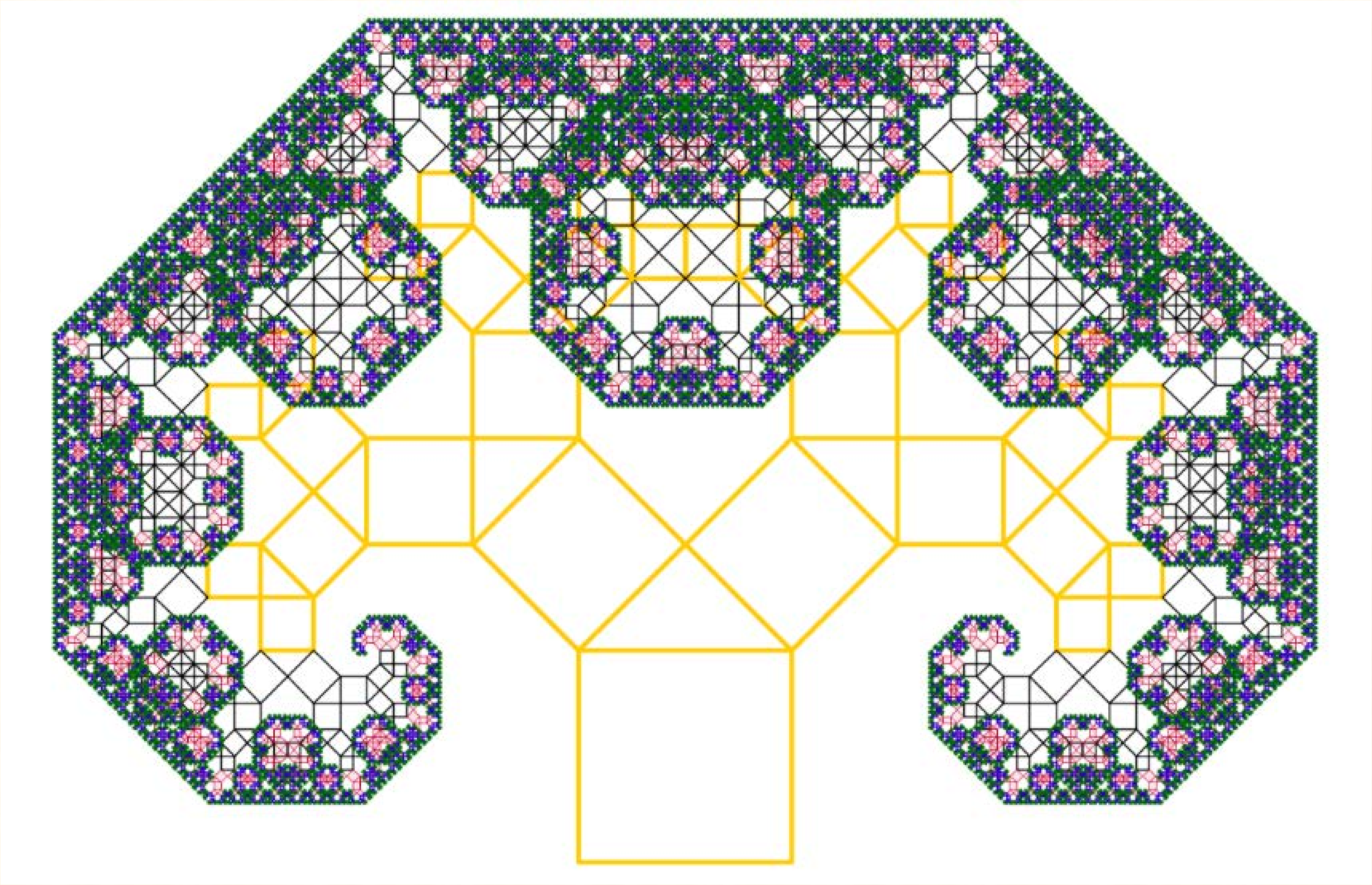
$$u_n = \tfrac{1}{2} \cdot u_{n-1} \quad \text{met} \quad u_0 = 1$$

Volgens de somformule voor meetkundige reeksen nadert de uitkomst naar

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\tfrac{1}{2}} = 2$$

Bijzondere somrijen

Rijen en reeksen



Bijzondere somrijen

a) Som van de rekenkundige reeks

b) Som van de meetkundige reeks

c) Som van de lineaire differentievergelijking van de 1e orde

d) De harmonische reeks

e) De reeks van Euler

f) De reeks van Leibniz

g) De halverings reeks

mede mogelijk gemaakt door provincie Overijssel