Oneindige willekeur... of niet?

Werner Scheinhardt

TW onderwijsprijs, 10 februari 2014

TW

- propaedeuse (TW 20 jaar)
- doctoraal (TW 25$+\delta$ jaar)
- doctoraat (TW 30 jaar)
- vaste positie (TW 35$-\varepsilon$ jaar)
- ~~midlife crisis~~ (TW 40 jaar)
- TWOP-nominatie! (TW 45 jaar)

TW45

$$45 = \sum_{i=0}^{9} i$$

$$\begin{aligned} 45 &= 101101 && \text{(binair)} \\ &= 55 && \text{(octaal)} \\ &= 2D && \text{(hexadecimaal)} \end{aligned}$$

TW45 in decimalen van π?

TW45 in π

- Voorbeeld codering (zonder 'Q'):

$$\begin{array}{c} 01, 26, 51, 76 \to \text{ A} \\ 02, 27, 52, 77 \to \text{ B} \\ \vdots \\ 25, 50, 75, 00 \to \text{ Z} \end{array} \qquad \pi = 3\,.\underbrace{1\ 4}_{\text{N}}\ \underbrace{1\ 5}_{\text{O}}\ \underbrace{9\ 2}_{\text{R}}\ 6\ 5\ \ldots$$

$$\text{find} \quad \ldots\ \underbrace{4\ 4}_{\text{T}}\ \underbrace{4\ 7}_{\text{W}}\ \underbrace{4\ 5}_{45}\ \ldots$$

- Eerste positie TW45: 9385^e decimaal van π
- Maar TW45 komt veel vaker voor, het lijkt wel even vaak als in een willekeurige reeks.
- Dus: decimale ontwikkeling van π lijkt wel random...

Normale getallen

- ... π lijkt wel een normaal getal!
- Definitie:
  x is 10-normaal (in 10-tallig stelsel) als in de decimale ontwikkeling elke reeks van *n* cijfers voorkomt met frequentie $1/10^n$ (in de limiet).
- Voorbeeld: 1/10 van de decimalen is een ‘4’, 1/100 van de tweetallen is ‘45’, etc.
- Analoog in *b*-tallig stelsel: *b*-normaal.

Normale getallen

Enkele feiten:

- Rationale getallen zijn niet normaal
- Borel: bijna alle getallen zijn normaal...
  ... maar toch zijn ze moeilijk te vinden!
- Vermoeden (geen bewijs!): π, e, $\sqrt{2}$, $\ln(2)$ zijn normaal.
- $\pi = 3.1415\ldots 450450045000450000450000045\ldots$?
- Wel te construeren, b.v. Champernowne number:

  $C_{10} = 0.1234567891011121314151617181920212223\ldots$
  is normaal in 10-tallig stelsel.

Mooi concept. Twee aspecten: willekeur en oneindig

Oneindig

- Bijbel (of ander dik boek) in π?
- Wel in C_{10}, ook achterstevoren, 10x achterelkaar, om en om met de Koran, in alle talen!
- Net als DNA-code; Google maps; (film van) geschiedenis v.d. aarde
- Ook weer achterstevoren, ondersteboven, 10x achter elkaar en door elkaar
- En dat alles: oneindig vaak...

Leermomentje: oneindig is best veel!

Willekeur

- Kansmodel voor π?
- $P(n^e \text{ decimaal van } \pi \;=\; i) \;=\; 1/10 \quad \text{voor } \; i = 0, 1, \ldots, 9$?
- Raar voor deterministisch proces? Vergelijk:

- rollen van een dobbelsteen
- random generator in computer

Leermomentje: zekerheid biedt kansen!

Tijd voor wat ~~Toegepaste~~ Wiskunde

- Stelling:
  x is 10-normaal $\Leftrightarrow$ reeks $(10^d\pi \mod 1)$ is uniform in $[0, 1]$
- Voorbeeld voor π:

$$\begin{array}{r}
(3).14159\ldots \\
(31).41592\ldots \\
(314).15926\ldots \\
\vdots
\end{array}$$

- Bezoekt deze reeks ieder deelinterval van $[0, 1]$ met verwachte frequentie?

Tijd voor wat meer ~~Toegepaste~~ Wiskunde

- BBP-formules:

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} 16^{-n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{n} \qquad \text{(uit Taylor reeks)}$$

- n^e 'decimaal' snel te bepalen voor b.v.
  $\ln(2) = 0.101100010\ldots$ (binair)
- $\ln(2)$ is 2-normaal
  $\Leftrightarrow$ reeks $(2^n \ln(2) \mod 1)$ is uniform in $[0,1]$
  $\Leftrightarrow$ reeks x_n is uniform in $[0,1]$, met x_n als volgt:

$$x_n = (2x_{n-1} + \frac{1}{n}) \mod 1 \quad (\text{en } x_0 = 0)$$

- Iets dergelijks voor π
- Vergelijk random generator!

Random generator

- Bekende (pseudo) random generator (in computer):

$$x_n = (bx_{n-1} + r) \mod 1$$

- Periodiek! (met doorgaans grote periode)
- vb: $x_n = (2x_{n-1} + 3/10) \mod 1$ geeft
  $0 \to 3/10 \to 9/10 \to 1/10 \to 5/10 \to 3/10 \to \cdots$
- Hypothese (Bailey-Crandall):
  Als we r vervangen door r_n (rationaal in n, milde condities), dan is (x_n) uniform dicht op $[0, 1]$, of (x_n) heeft een 'finite attractor'.
- Gevolg 1: perfecte random generator!
- Gevolg 2: (o.a.) $\pi, e, \ln(2), \sqrt{2}$ zijn 2-normaal!

Conclusies

- Oneindig is best veel
- Zekerheid biedt kansen (b.v. C_{10})
- Geef π een kans en bewijs Bailey-Crandall !

- Vragen/reacties? Stuur me een email
- (Dank Marten Giersch voor de backup video-opname!)