ECONOMETRIC INSTITUTE

OVERBODIGE EN NIET-BINDENDE RESTRICTIES IN LINEAIRE PROGRAMMERINGSPROBLEMEN

J. TELGEN

REPRINT SERIES no. 244

Dit artikel is verschenen in "Bedrijfskunde", Jrg. 51 (1979).

ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM,
P.O. BOX 1738, ROTTERDAM, THE NETHERLANDS

Drs. J. Telgen*

Overbodige en niet-bindende restricties in lineaire programmeringsproblemen

Inleiding

De lineaire programmering is een veel gebruikte techniek in de praktijk zowel in het bedrijfsleven als bij de overheid en non-profitorganisaties. In dit artikel wordt nader ingegaan op restricties, die geen invloed hebben op de oplossing van het lineaire programmeringsprobleem, maar in de praktijk toch vaak blijken voor te komen. Naast het rekentechnische argument om dergelijke restricties op te sporen en te verwijderen, blijkt men uit de identificatie van overbodige en niet-bindende restricties vaak ook waardevolle extra informatie te kunnen putten.

Lineaire programmeringsproblemen zijn problemen waarin een lineaire functie geoptimaliseerd dient te worden rekening houdend met een aantal lineaire restricties. Dit kan als volgt mathematisch geformuleerd worden;

(1) maximaliseer $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

onder de voorwaarden:

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., m.$

Ieder lineair programmeringsprobleem kan in deze vorm worden geschreven (zie Dantzig [1963]).

Vele problemen, die zich in de praktijk van de bedrijfsvoering voordoen zijn lineaire programmeringsproblemen. In dit verband zijn te noemen produktieplanning, transportproblemen, mengproblemen, enz. Voor een gedetailleerd overzicht wordt verwezen naar Dantzig [1963]. Voor het vinden van de optimale oplossing voor lineaire programmeringsproblemen is een redelijk goede techniek beschikbaar: de *simplex methode* van Dantzig of één van de vele varianten daarop. Het aantal berekeningen dat in deze methode moet worden uitgevoerd is in sterke mate afhankelijk van de afmetingen van het probleem. In het bijzonder het aantal restricties (m) bepaalt voor een groot deel de hoeveelheid uit te voeren berekeningen. In de praktijk is echter gebleken dat vele restricties, die in een lineair programmeringsprobleem geformuleerd worden niet actief zijn, in die zin dat ze geen invloed hebben op de oplossing. Aan de hand van een voorbeeld wordt hier nader ingegaan op enige aspecten van niet-actieve restricties.

Overbodige en niet-bindende restricties

Allereerst definiëren we het toegelaten gebied voor de restricties (2) als

(3) $S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2 ..., m\}$

Daarnaast definiëren we het toegelaten gebied voor dit probleem, indien de k-de restrictie ($k \leq m$) wordt weggelaten als

(4) $S = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., m, \; i \neq k \}$

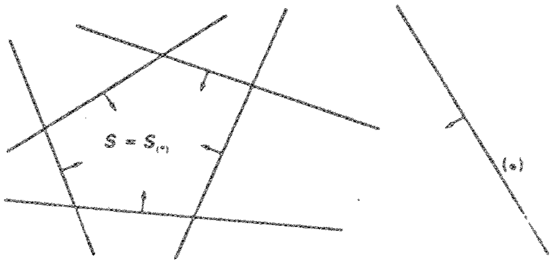
* Drs. J. Telgen is wetenschappelijk medewerker bij de vakgroep Mathematische Besliskunde in de economische faculteit van de Erasmus Universiteit Rotterdam.

Met behulp hiervan kunnen we de niet-actieve restricties in twee soorten onderscheiden: In de eerste plaats definiëren we *overbodige restricties*, die het toegelaten gebied niet beperken en dus zeker geen invloed hebben op de optimale oplossing als volgt:
Definitie: De k-de restrictie van (2) is overbodig in het systeem (2) dan en slechts dan als

$$(5) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqq b_k$$

$$\text{voor alle } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_k; \qquad 1 \leqq k \leqq m.$$

Een dergelijke situatie is geschetst in figuur 1, waarin de met (*) aangegeven restrictie overbodig is.



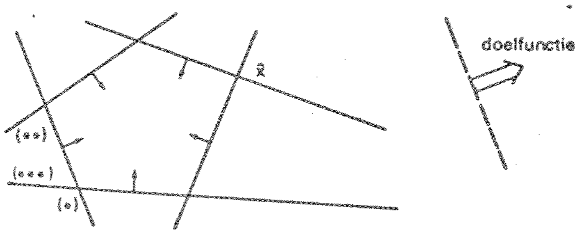
Figuur 1

Restrictie (*) is overbodig omdat deze het toegelaten gebied S niet beperkt. Het toegelaten gebied voor het probleem zonder restrictie (*), genaamd $S_{(*)}$ is gelijk aan S.
Daarnaast onderscheiden we *niet-bindende restricties*, die weliswaar niet overbodig zijn, maar ook de optimale oplossing niet beinvloeden.
Definitie: De k-de restrictie is niet-bindend als zij niet overbodig is en

$$(6) \quad \max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S\right\} =$$

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_k\right\}$$

Deze situatie is geschetst in figuur 2.



Figuur 2

Restricties (*), (**) en (***) zijn niet bindend, omdat ze weliswaar het toegelaten gebied S beperken, maar niet bepalend zijn voor de optimale oplossing $\hat{x}$.
Let wel, restricties zijn overbodig onafhankelijk van de gespecificeerde doelfunctie, terwijl het eventueel niet-bindend zijn, juist sterk afhankelijk is van de doelfunctie.
Voor een meer gedetailleerd overzicht van definities van overbodige en niet-bindende restricties wordt verwezen naar Telgen [1977*a*].

De drie belangrijkste oorzaken van het feit dat men overbodige en niet-bindende restricties in lineaire programmeringsproblemen kan vinden, zijn:

a. onvoldoende inzicht in het te beschrijven systeem. Dit kan veroorzaakt zijn door een te oppervlakkige beschouwing van het probleem, maar evenzeer doordat het systeem te groot en/of te ingewikkeld is om alle relaties en interacties te kunnen overzien;
b. impliciete voorkeur voor te veel restricties boven de kans op een oplossing, die niet aan alle praktische eisen voldoet. Men specificeert liever extra restricties om de kans te verkleinen dat men er één vergeet en het probleem nogmaals moet worden opgelost. Deze reden voor de specificatie van overbodige en niet-bindende restricties wordt steeds belangrijker, omdat meer en meer modellen opgesteld worden (automatisch gegenereerd worden), die een aantal

malen, met licht gewijzigde coëfficiënten opgelost moeten worden. In dergelijke gevallen kan een restrictie momenteel nog niet actief zijn, maar in de toekomst wel actief worden. Nu blijkt men 'op zeker te spelen' en deze restricties wel te specificeren;

c. ondeelbaarheid van bepaalde grootheden. In de praktijk kunnen vele middelen, die als restrictie in het lineaire programmeringsprobleem zijn opgenomen, niet exact worden afgemeten op de optimale oplossing; in de eerste plaats niet omdat vele middelen slechts in discrete hoeveelheden beschikbaar zijn (men kan wel 1 machine hebben of 2, maar niet bijv. 1,38 machine) en in de tweede plaats, omdat de optimale oplossing vaak niet bekend is, wanneer de beschikbare middelen worden vastgesteld.

Het zal duidelijk zijn dat de specificatie van overbodige en niet-bindende restricties in lineaire programmeringsproblemen de hoeveelheid rekenwerk alleen maar kan vergroten. Alleen al daarom zou identificatie en verwijdering zinvol kunnen zijn. Daarnaast kan men echter uit de informatie dat bepaalde restricties niet-actief zijn, soms interessante mogelijkheden afleiden. Bijvoorbeeld, de informatie dat een capaciteitsrestrictie overbodig is, kan op de mogelijkheid wijzen de 'overbodige capaciteit' op andere wijze te benutten.

Identificatie

Uit de literatuur zijn een aantal methoden bekend om overbodige restricties in lineaire programmeringsproblemen te identificeren. In Telgen [1977*b*] is aangetoond dat al deze methoden te beschouwen zijn als varianten van een algemene methode, die daarin gepresenteerd wordt.

Het principe van deze methode is de bepaling van

$$(7)\quad \hat{u}_k = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in S_k} \; b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$$

voor alle restricties k, die op overbodigheid gecontroleerd moeten worden. Wanneer nu $\hat{u}_k \geqslant 0$ resulteert, betekent dat, dat

$$(8)\quad b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geqq 0$$

en dus

$$(9)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqq b_k$$

voor alle $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ S_k.

Maar dit is precies de definitie van overbodigheid, zoals aangegeven in (5). Dus als $\hat{u}_k > 0$ is de k-de restrictie overbodig en als $\hat{u}_k < 0$, dan is de k-de restrictie niet overbodig.

In principe vereist (7) het oplossen van evenveel lineaire programmeringsproblemen als het aantal op overbodigheid te controleren restricties. Door echter gebruik te maken van een aantal mogelijkheden, die dit specifieke probleem biedt, kan de hoeveelheid uit te voeren berekeningen sterk verminderd worden (zie Telgen [1977*b*].

Wat betreft de niet-bindende restricties moet gesteld worden, dat momenteel geen andere methoden beschikbaar zijn om deze te identificeren, dan de (gedeeltelijke) oplossing van het oorspronkelijke probleem en identificatie achteraf. Daarnaast kunnen niet-bindende restricties in een aantal gevallen veranderd worden in overbodige restricties en daarna met behulp van methoden ter indentificatie van overbodige restricties, als niet-bindend geïdentificeerd worden.

De vraag of het vanuit rekentechnisch oogpunt zinvol is om overbodige restricties te identificeren in een bepaald lineair programmeringsprobleem, kan echter alleen beantwoord worden, indien men enig inzicht heeft in het aantal overbodige restricties. Het antwoord is dus

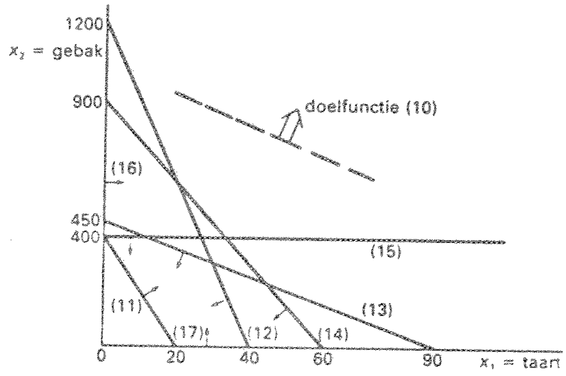
in hoge mate probleemspecifiek.
Wanneer men daarnaast ook de andere positieve effecten van een identificatie van overbodige restricties beschouwt (zoals genoemd in de vorige paragraaf), kan het antwoord alleen maar in positieve zin veranderen.
Uit de literatuur zijn slechts zeer weinig gegevens bekend over het voorkomen van overbodige restricties in praktische lineaire programmeringsproblemen. Zionts [1965] en Thompson, Tonge en Zionts [1966] rapporteren mogelijke reducties tot 50% terwijl Tischer [1968] zelfs nog grotere mogelijkheden tot reductie heeft aangetroffen in produktieplanningsproblemen (tot 80%). Niet in alle lineaire programmeringsproblemen zullen dergelijke reducties mogelijk zijn. Toch is de algemene indruk dat enige reductie meestal mogelijk is. Wat betreft het voorkomen van niet-bindende restricties kan men wel uitsluitsel geven. Omdat in de optimale oplossing precies *n* restricties bindend zijn, is het aantal niet-bindende en overbodige restricties gelijk aan *m-n*.
De in commerciële lineaire programmeringsprogramma's voorkomende opties ter reducering van de probleemafmetingen (zowel in IBM's, MPSX als in CDC's, APEX III onder de naam REDUCE) gebruiken slechts zeer eenvoudige methoden ter identificatie van overbodige restricties. Toch zijn juist van deze relatief eenvoudige methoden, empirische resultaten bekend (Tischer [1968], Zionts [1965], Thompson, Tonge and Zionts [1966]. die redelijk gunstig zijn. Bovendien wordt de REDUCE optie in de praktijk regelmatig gebruikt (Müller and Tilanus [1977]). Over het algemeen is echter nog weinig empirisch werk verricht op dit gebied, zodat nog geen definitieve conclusies kunnen worden getrokken.

Een voorbeeld

Ter verduidelijking van het voorgaande zullen we nu een voorbeeld behandelen. We beschouwen de firma Koekebakker, die taart en gebak produceert, respectievelijk in hoeveelheden x_1 en x_2. Op grond van een leveringscontract is de firma Koekebakker verplicht minimaal 400 gewichtseenheden per periode te leveren, terwijl taart en gebak per eenheid respectievelijk 20 en 1 gewichtseenheid wegen. De oven voor het bakken van de produkten is 1200 tijdseenheden beschikbaar, terwijl taart en gebak per eenheid respectievelijk 30 en 1 tijdseenheid moeten worden gebakken. De capaciteit van de opslagruimte, waar de produkten wachten op verder transport is 90 plaatsen, waarbij 1 taart of 5 eenheden gebak op 1 plaats gezet kunnen worden. Het personeel kan per 30 tijdseenheden 1 taart of 15 eenheden gebak produceren en heeft in totaal 1800 tijdseenheden ter beschikking. Tenslotte mag de firma Koekebakker volgens een afspraak met de concurrent Tom Pouce Inc. niet meer dan 400 eenheden gebak produceren. De winstmarges op taart en gebak zijn respectievelijk f 4 en f 0,70 per eenheid.
Mathematisch is dit probleem dan als volgt weer te geven:

(10) (winstmaximalisatie)	maximaliseer $z = 4x_1 + 0{,}7x_2$
onder de voorwaarden	
(11) (leveringscontract)	$20x_1 + x_2 \geqq 400$
(12) (beschikbare oven)	$30x_1 + x_2 \leqq 1200$
(13) (opslagruimte)	$x_1 + 0{,}2x_2 \leqq 90$
(14) (personeel)	$30x_1 + 2x_2 \leqq 1800$
(15) (afspraak Tom Pouce Inc)	$x_2 \leqq 400$
(16) (fysieke eis)	$x_1 \geqq 0$
(17) ' '	$x_2 \geqq 0$

Dit kan als volgt grafisch worden weergegeven:



Figuur 3

Zoals ook uit een nadere beschouwing van deze figuur valt op te maken, zijn de restricties (14) en (16) overbodig. Met behulp van de eerder genoemde algemene methode ter identificatie van overbodige restricties is namelijk aan te tonen dat:

$$(18)\quad \min_{S_{14}} 1800 - 30x_1 - 2x_2 = 300 \geqq 0$$

en

$$(19)\quad \min_{S_{16}} x_1 = 0 \geqq 0$$

en dus zijn beide restricties volgens (5) overbodig.
De niet-bindende restricties zijn niet zo eenvoudig mathematisch op te sporen, maar uit figuur (1) valt af te lezen dat de restricties (11), (15) en (17) niet bindend zijn. In plaats van winstmaximalisatie (10) onder de voorwaarden (11) tot en met (17), wordt hetzelfde resultaat bereikt met winstmaximalisatie onder de voorwaarden (12) en (13). De optimale oplossing is dan $x_1 = 30$, $x_2 = 300$ en $z = 330$; m.a.w. produceer 30 eenheden taart en 300 eenheden gebak waardoor een totale winst van f 330 ontstaat.
Het verschil tussen overbodige restricties (die altijd verwijderd kunnen worden) en niet-bindende restricties (afhankelijk van de doelfunctie) wordt duidelijk als de winstmarge op taart zou dalen tot f 3 per eenheid. Alleen de doelfunctie verandert dan (in max $z = 3x_1 + 0{,}7x_2$), zodat alle overbodige restricties overbodig blijven, maar nu is ook restrictie (15) bindend geworden en restrictie (12) daarentegen niet bindend. De optimale oplossing is dan $x_1 = 10$, $x_2 = 400$ en de doelfunctiewaarde f 290.
Keren we terug naar het oorspronkelijke voorbeeld (met doelfunctie (10), dan kunnen we constateren, dat in de optimale oplossing 300 tijdseenheden van het personeel, corresponderend met de overbodige restrictie (14), ongebruikt zijn. Misschien is het mogelijk deze niet benutte capaciteit in te zetten om één van de bindende restricties te ontlasten. Bijvoorbeeld: de capaciteit van de opslagruimte is minder restrictief als het personeel alvast wat produkten wegbrengt, zodat restrictie (13) verzacht kan worden tot

$$(13')\quad x_1 + 0{,}2x_2 \leqq 100$$

De optimale oplossing voor dit nieuwe probleem wordt dan $x_1 = 28$, $x_2 = 360$ met een winst van f 364.
Omdat hier sprake is van een wijziging in de restricties, moeten zowel de oorspronkelijk overbodige restricties als de oorspronkelijk niet-bindende restricties weer in de beschouwing worden opgenomen. Hoewel dat in dit voorbeeld niet het geval is, zouden beide soorten restricties nu bindend kunnen worden!
Een andere mogelijkheid voor de ongebruikte personeelstijd is misschien een kwaliteitsverbetering en verfraaiing van het gebak, waardoor de winstmarge stijgt tot f 9 per eenheid. Dit heeft tot gevolg dat de optimale oplossing verandert in $x_1 = 10$, $x_2 = 400$ met een winst

van f 370. Ook in dit geval verandert de status van enige restricties van bindend in niet-bindend en omgekeerd, aangezien het een wijziging in de doelfunctie betreft.
Het zal duidelijk zijn, dat niet alleen de resterende capaciteit van overbodige restricties maar ook die van niet-bindende restricties op bovenvermelde wijze aangewend kan worden.

Conclusie

In het voorbeeld is duidelijk gemaakt in hoeverre de identificatie van overbodige en niet-bindende restricties in een lineair programmeringsprobleem zinvol kan zijn. Hierbij is naast het rekenkundige aspect ook de informatiéve waarde van identificatie beschouwd. Gebleken is dat alleen al de informatie, die men uit deze identificatie kan verkrijgen, op zich voldoende aanleiding kan geven tot aanzienlijke verbeteringen. De voordelen van de identificatie van overbodige en niet-bindende restricties zullen des te zwaarder wegen, naarmate de lineaire programmeringsproblemen groter en daarmee onoverzichtelijker zijn.

Literatuur

- G. B. Dantzig [1963], *Linear programming and extensions*, Princeton.
- W. Müller and C. B. Tilanus [1977], Linear programming from a management point of view; *European Journal of Operational Research*, vol. 2, no. 4.
- J. Telgen [1977*a*], *Redundant and non-binding constraints in linear programming problems*, report 7720, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.
- J. Telgen [1977*b*], *On redundancy in systems of linear inequalities*, report 7718, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.
- G. L. Thompson, F. M. Tonge and S. Zionts [1966], Techniques for removing non-binding constraints and extraneous variables from linear programming problems, *Management Science*, vol. 12, no. 7.
- H. J. Tischer [1968], *Mathematische Verfahren zur Reduzierung der Zeilen- und Spaltenzahl linearer Optimierungsaufgaben*, Zentralinstitut für Fertigungstechnik des Maschinenbaues, Karl Marx Stadt.
- H. J. Zimmerman und T. Gal [1975], Redundanz und ihre Bedeutung für betriebliche Optimierungsentscheidungen, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, vol. 45, no. 4.
- S. Zionts [1965], *Size reduction techniques of linear programming and their application*, PH D thesis, Carnegie Institute of Technology.

REPRINT SERIES

List of the reprints 1-120, 121-160, 161-189 and 190-230 (of which several are now out of print) have been published respectively in reprint 121 and on the back of reprints 160, 189 and 230.
The reprints are available at the ERASMUS UNIVERSITY, ECONOMETRIC INSTITUTE, P.O. Box 1738, Rotterdam, The Netherlands.

231. "Aspects of Elliptic Curves; An Introduction", by R.J. Stroeker.
232. "Redundant Constraints in Linear Programming Problems", by J. Telgen.
233. "On Almost-Fixed-Point Theory", by M. Hazewinkel and M. v.d.Vel.
234. "A General Market Model of Labour Income Distribution: An Outline", by W.H. Somermeyer.
235. "On Typical Characteristics of Economic Time Series and the Relative Qualities of Five Autocorrelation Tests", by C. Dubbelman, A.S. Louter and A.P.J. Abrahamse.
236. "A Characterization of Multidimensional Extreme-Value Distributions" (Note), by L. de Haan.
237. "Application of Non-Linear Programming to Plan Geometry", by R.J. Stroeker.
238. "Portefeuilleselectiemodellen door Kleine Investeerdeerders", door G. van der Hoek en A.H.G. Rinnooy Kan.
239. "Consistent Aggregation - An Alternative Derivation and a Generalization of Nataf's Theorem", by W.H. Somermeyer and J. van Daal.
240. "The Complexity of the Network Design Problem", by D.S. Johnson, J.K. Lenstra and A.H.G Rinnooy Kan.
241. "Constructing Formal Groups. VIII: Formal A-Modules", by M. Hazewinkel.
242. "Complexity of Packing, Covering and Partitioning Problems", by J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan.
243. "A Class of Diophantine Equations Connected with Certian Elliptic Curves over $Q(\sqrt{-13})$", by R.J. Stroeker.
244. "Overbodige en Niet-Bindende Restricties in Lineaire Programmerings-problemen", door J. Telgen.