Wiskundig denken en de cognitieve structuur

Marcel Reuvekamp
S9804498
m.h.a.reuvekamp@student.utwente.nl

Voorwoord

Dit onderzoeksverslag is geschreven in het kader van het vak Onderzoek van Onderwijs, welke deel uitmaakt van de eerstegraads lerarenopleiding Wiskunde aan de Universiteit Twente te Enschede.

Het onderzoek is uitgevoerd aan de OSG Hengelo, vestiging het Bataafse Kamp in de 5Havo Wiskunde A klas van docent Jan Niphuis.

Hierbij wil ik Jan en de leerlingen die hebben meegedragen aan dit onderzoek: Marit, Lindsey, Stein en Robert hartelijk bedanken voor hun hulp. Zonder hen was dit onderzoek niet mogelijk geweest.

Marcel Reuvekamp

Inhoudsopgave

1. Inleiding ... 1
2. Huidige opvattingen over wiskunde en onderwijs ... 2
   2.1 De constructivistische onderwijsvisie ... 2
   2.2 Wat zorgt ervoor dat iemand wiskundige opgaven kan oplossen? ... 3
      2.2.1 Cognitieve units ... 3
      2.2.2 Het Beeld van het Concept ... 4
      2.2.3 Het Procept ... 5
   2.3 Hoe leren mensen wiskunde? ... 6
      2.3.1 Hoe werkt het geheugen? ... 6
      2.3.2 Het leerproces ... 8
   2.4 Het begrijpen van wiskunde ... 9
      2.4.1 Van Hiele en begrijpen ... 9
      2.4.2 Zwaneveld en van Dormolen en begrijpen ... 10
      2.4.3 Skemp en begrijpen ... 10
      2.4.4 De verschillende soorten begrijpen tegen elkaar ... 11
3. Het onderzoek ... 13
   3.1 Het probleem ... 13
   3.2 De onderzoeksvraag ... 13
   3.3 Het succes van de transfer ... 14
   3.4 Stappen die de leerling kan zetten ... 14
   3.5 De Methodiek ... 16
4. Resultaten ... 17
   4.1 De Leerlingen ... 17
   4.2 Verschillende stappen ... 17
      4.2.1 Stap 1 ... 17
      4.2.2 Stap 2 ... 18
      4.2.3 Stap 3 ... 18
      4.2.4 Stap 4 ... 19
      4.2.5 Stap 5 ... 19
5. De leerlingen en Tall ... 20
   5.1 Marit ... 20
   5.2 Lindsey ... 21
   5.3 Stein ... 23
   5.4 Robert ... 24
6. Conclusies ... 25
   6.1 Succes bij transfer ... 26
7. Literatuur ... 27

Bijlage 1: Marit ... 29
Bijlage 2: Lindsey ... 34
Bijlage 3: Stein ... 39
Bijlage 4: Robert ... 41

1. Inleiding

Tegenwoordig valt de wiskunde niet meer weg te denken in onze samenleving. Deze vind je in alle takken van de wetenschap en ook in het dagelijks leven steeds weer terug. Het is daarom ook erg belangrijk dat de mensen enige wiskundige kennis hebben. Dit is dan ook een reden dat wiskunde een groot vak is in het voortgezet onderwijs. Zodra leerlingen het voortgezet onderwijs verlaten is het de bedoeling dat leerlingen een bepaalde hoeveelheid wiskundige bagage op zak hebben.
Om de wiskundige kennis te testen, geven de scholen allerlei proefwerken en natuurlijk een centraal examen als afsluiting. Op grond van de hiermee verkregen cijfers wordt uiteindelijk bepaald of de beschikbare kennis van de leerling groot genoeg is.

Maar zegt dit cijfer ook daadwerkelijk wat over het niveau van de leerling? Is het niet mogelijk dat leerlingen een voldoende halen voor de stof, maar deze toch niet in voldoende mate beheersen? Hoe vaak gebeurt het wel niet dat een leerling een bepaalde opgave uitstekend kan oplossen, maar als je dan vraagt waarom ze dit zo oplossen, deze hier geen adequaat antwoord op heeft? De leerling heeft wellicht een ‘truckje’ geleerd om een opgave op te lossen, maar het gewenste wiskundige begrip ontbreekt.

Des te eerder leerlingen beginnen met het leren van dusdanige ‘truckjes’, des te eerder leerlingen in de problemen gaan komen als ze verder gaan met de stof. De stof zal steeds complexer worden en het zal voor de leerling erg moeilijk worden om de eerder geleerde stof toe te passen op de nieuwe, ingewikkeldere stof.

In dit onderzoek zal worden gekeken naar de transfer van bestaande kennis bij nieuwe stof. Kunnen leerlingen bestaande kennis aanwenden om zo tot een antwoord te komen op een voor deze leerlingen onbekende opgave?

Als eerste behandelt dit verslag in hoofdstuk 2 de huidige opvattingen over wiskunde en onderwijs. Hier worden kort enkele onderwijsvisies behandeld, waarna gekeken wordt wat er voor zorgt dat iemand wiskundige opgaven kan oplossen, hoe mensen wiskunde leren en tenslotte zien we enkele verschillende niveaus van begrijpen van wiskunde.
In hoofdstuk 3 volgt een beschrijving van het onderzoek, gevolgd door de resultaten van dit onderzoek in hoofdstuk 4. Op deze resultaten wordt in hoofdstuk 5 gereflecteerd, waarna de conclusies volgen in hoofdstuk 6. In de bijlagen zijn tenslotte de uitwerkingen van de interviews met de leerlingen te vinden.

2. Huidige opvattingen over wiskunde en onderwijs

Er zijn vele opvattingen over wiskunde en onderwijs. In dit onderzoek zullen we kijken naar de constructivistische onderwijsvisie. Deze onderwijsvisie kan gezien worden als een reactie op overdrachtsonderwijs enerzijds en varianten van zelfontdekkend leren anderzijds (Verhoef, 2003).

2.1 De constructivistische onderwijsvisie

Het normale onderwijs dat de leerlingen krijgen gebaseerd is op het zogenaamde overdrachtsonderwijs. Dit onderwijs gaat uit van de gedachte dat leerlingen kennis krijgen aangereikt, die zij dan zelf integreren met reeds bestaande kennis. Leerlingen worden in de meest extreme vorm beschouwd als passieve ontvangers van kennis, waarbij weinig of geen rekening wordt gehouden met voorkennis (Verhoef, 2003).
Zoals gezegd, gaat dit onderzoek echter uit van een constructivistische onderwijsvisie. In deze opvatting staat de leerling centraal. De docent heeft slechts een begeleidende rol (Verhoef, 2003).
In de constructivistische onderwijsvisie komen twee hoofdstromingen aan de orde: De individueel- en de sociaal- constructivistische onderwijsvisie.

2.1.1 De individueel-constructivistische onderwijsvisie

Deze onderwijsvisie heeft met name aandacht voor domeinspecifieke kennis. Er wordt sterk de nadruk gelegd op de interactie tussen het individu en de werkelijkheid. Hierbij speelt de sociale omgeving (docenten en leerlingen) een belangrijke, vooral stimulerende rol in het leerproces. De rol van docent bij het aanbieden van ideeën en de introductie van nieuwe manieren van denken is echter nauwelijks aan de orde; het gaat puur om een stimulerende rol in het individuele ontwikkelingsproces (Verhoef, 2003). Dit in tegenstelling tot de sociaal-constructivistische onderwijsvisie.

2.2.1 De sociaal-constructivistische onderwijsvisie

In deze visie gaat men uit van de gedachte dat de ontwikkeling van leerlingen kan worden gestimuleerd door hen te laten deelnemen aan activiteiten die ze nog net niet zelfstandig kunnen uitvoeren, maar wel met hulp van de docent. De docent heeft vervolgens de taak leerlingen te helpen met het uitvoeren van de activiteiten, en moeilijker onderdelen hiervan desnoods over te nemen totdat leerlingen de activiteiten zelfstandig kunnen uitvoeren (Verhoef, 2003).

In dit onderzoek zal zowel deze stimulerende rol als de helpende taak van de docent aan de orde komen, als leerlingen naar een oplossing werken van een probleem.

Om goed de stimulerende en helpende taak van de docent te kunnen vervullen is het van belang om te weten hoe leerlingen informatie verwerken tot daadwerkelijke kennis welke gebruikt kan worden voor het oplossen van wiskundige problemen.

2.2 Wat zorgt ervoor dat iemand wiskundige opgaven kan oplossen?

Over het algemeen wordt wiskunde een erg moeilijk vak gevonden op school. Toch zijn er ook mensen die hier schijnbaar doorheen freewheelen en tonen geen enkele moeite ervoor te hoeven doen. Wat zorgt er nu dan daadwerkelijk voor dat iemand wiskundige opgaven kan maken?

Menselijke activiteiten kun je in het algemeen onderscheiden in drie componenten: perceptie, gedachte en actie. Vanuit deze eenvoudige observatie, kun je wiskundige activiteiten zien als het waarnemen van objecten, het nadenken over de activiteiten en het uitvoeren van acties op deze activiteiten (Tall, 1995).

Het menselijk brein is niet van nature gevormd voor snelle en efficiënte wiskunde (Tall, 2000). Toch moet het wiskundige denken worden gedaan door de dit menselijk brein. Dit houdt in dat complexe beslissingen worden gemaakt door terug te vallen op overzichtelijke niveaus, waarbij onbelangrijke details worden onderdrukt en extra wordt gelet op belangrijke informatie. Informatie wordt opgedeeld in kleine stukjes, welke een cognitieve structuur vormen. Deze stukjes zijn nauw verbonden aan elkaar, zodat indien nodig gewenste informatie makkelijk toegankelijk is. Hierbij kun je denken aan simpele dingen als 3+4 is nauw verbonden aan 4+3 of 7-4=3. Deze concepten zijn vaak zo nauw verbonden dat ze verschillende aspecten lijken te zijn van dezelfde cognitieve structuur. We noemen deze concepten dan ook wel ‘cognitieve units’.

2.2.1 Cognitieve units

Een cognitieve unit bestaat uit een cognitief onderdeel waar door een individu op een bepaald ogenblik aandacht kan worden besteed, samen met andere ideeën welke hier nauw aan verbonden zijn (Tall & Barnard, 1997).
Deze cognitieve units zijn specifiek voor wiskunde op zijn plaats aangezien wiskunde veelal op te delen is in kleine stukjes en voor wiskundigen spreekt het voor zich dat vele van deze stukjes nauw aan elkaar verbonden zijn. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het oplossen van een ingewikkeld probleem, door deze in meerdere kleine stapjes op te lossen.
Ook kunnen verbindingen worden gelegd tussen stukjes doordat er meerdere manieren zijn om bepaalde problemen op te lossen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het construeren van een vierkant, welke kan met behulp van een geodriehoek, maar ook met behulp van slechts een passer en liniaal.

De manier waarop verschillende stukjes cognitieve structuur in kleine, nauw verbonden cognitieve units worden omgezet noemen we compressie, naar Terminologie van Thurston (Thurston, 1990): ‘*Wiskunde is verbazingwekkend comprimeerbaar: je kunt lang worstelen, stapje voor stapje, om vanuit verschillende methodes een proces of idee door te werken. Maar zodra je het echt begrijpt en je het geestelijk als een geheel kunt zien, is er vaak een enorme mentale compressie. Je kunt het wegzetten en weer snel en volledig terughalen als je het nodig hebt, en het gebruiken als een stap in een ander mentaal proces. Het inzicht dat bij deze compressie hoort is één van de ware geneugten van de wiskunde.*’

Vaak wordt bij deze compressie gebruik gemaakt van bepaalde ezelsbruggetjes. Ingewikkelde getallen als bijvoorbeeld 246819141918 kan bijvoorbeeld makkelijk onthouden worden als de sequentie 2,4,6,8, gevolgd door de data 1914-1918 van de eerste wereldoorlog(Tall & Barnard, 2002). Doordat deze ezelsbruggetjes voor iedereen anders kunnen zijn, kan de compressie ook per individu verschillend zijn.

Het idee van cognitieve units is niet nieuw. Al in 1971 werd er over gesproken door Skemp (Skemp, 1971), die het begrijpen van wiskunde opvat als aanwezige kennis en vaardigheden in 'schema's'. Zo'n 'schema' is een term waarmee de aanwezigheid van mentale structuren wordt aangegeven. Het is een verenigd netwerk van begrippen, feiten, handelingen, emoties, enz. die op één of andere manier aan elkaar verbonden zijn. Neem bijvoorbeeld het begrip auto. De auto kan worden geclassificeerd als voertuig (samen met bussen, treinen, vliegtuigen, etc.). Tevens kan het geclassificeerd worden als statussymbool (met een hoge titel, een goot huis, enz.). Je kunt het ook zien als vorm van belastinginkomsten (samen met tabak, drank, etc.). Je kunt zien dat er op deze manier allerlei koppelingen gemaakt kunnen worden.
Volgens Skemp bestaan er naast verbindingen tussen cognitieve units ook cognitieve structuren welke verbindingen hebben binnenin een unit, afhankelijk van welk niveau van cognitieve structuur wordt bekeken.

Voor het verkrijgen van een krachtige denkstructuur zijn dus van belang(Tall & Barnard, 2002):

1) Het vermogen om informatie te comprimeren zodat deze past in cognitieve units
2) Het vermogen om verbindingen binnen en tussen cognitieve units te maken, zodat andere relevante informatie gemakkelijk onder de aandacht kan worden gebracht.

Deze compressie in cognitieve units leidt tot een zogenaamd beeld van het concept.

2.2.2 Het Beeld van het Concept

Het comprimeren van informatie gaat vaak gecombineerd met het geven van een naam of symbool aan een bepaald concept. Een naam van een concept is een stimulans voor ons geheugen als deze wordt gezien of gehoord. Er wordt iets opgeroepen door deze naam in ons geheugen. Waar je misschien zou verwachten dat hiermee de definitie van dat concept wordt opgeroepen, blijkt dit vaak niet zo te zijn (Vinner, 1991). Wat we wel oproepen is wat we het beeld van het concept (concept image) noemen (Tall & Vinner, 1981).
Dit beeld is een non-verbaal iets, wat in onze geest geassocieerd wordt met de naam van het concept. Het kan een visuele representatie zijn van het concept, indien het concept deze representatie heeft; het kan ook een verzameling zijn van indrukken of ervaringen. Een beeld van een concept hoeft daarom niet voor iedereen hetzelfde te zijn. Het is door de jaren opgebouwd uit allerlei soorten ervaringen, dat verandert terwijl het individu nieuwe stimuli ontmoet en volwassen wordt. Bij het woord tafel kan men bijvoorbeeld een beeld voor zich hebben van het aan tafel zitten, een gewone eettafel, een ronde tafel met 1 poot, enz.
Vaak ziet men dat, om tot een antwoord op een probleem te komen slechts het beeld van het concept wordt geraadpleegd. De definitie van dat concept wordt hierbij vaak ter zijde gelegd. Dit leidt normaal gesproken tot een succesvol resultaat, zodat mensen ook niet worden aangemoedigd om zich te beroepen op de definitie van het concept.
Het beeld van het concept kan ook een obstakel zijn bij het oplossen van problemen. Het is immers een stukje kennis dat ooit een keer afdoende is geweest om bepaalde problemen op te lossen. Dit aspect van 'afdoende zijn' zorgt er juist voor deze problemen. Het concept is in

gedachten verankerd. Bij nieuwe problemen kan de beschikbare kennis ontoereikend zijn. Het probleem zit hem er in dat er in een gebonden context wordt gewerkt, waarin alle gegeven voorbeelden een bepaalde eigenschap hebben. In afwezigheid van tegenvoorbeelden neemt het verstand deze eigenschappen onvoorwaardelijk aan in andere contexten (Tall, 1991). Dit kan dus duidelijk tot problemen leiden. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de stelling van Pythagoras. Leerlingen kennen de formule $a^2 + b^2 = c^2$ al snel uit hun hoofd en kunnen deze ook toepassen op rechthoekige driehoeken. Het probleem ontstaat wanneer de driehoeken niet meer rechthoekig zijn en leerlingen er vanuit gaan dat ook dan de formule opgaat.

Het geven van een naam aan een concept is niet de enige manier om voor compressie te zorgen. Ook het gebruik van symbolen wordt hiervoor veelvuldig gebruikt. Probleem bij symbolen zijn echter dat deze dubbelzinnig kunnen zijn. Het symbool + bijvoorbeeld staat voor het concept Som, maar tevens staat deze voor een proces, namelijk het proces van optellen. Deze dubbelzinnigheid is iets waar wiskundigen over het algemeen een hekel aan hebben. Om hier toch gebruik van te kunnen maken is de term *'procept'* in het leven geroepen.

2.2.3 Het Procept

Om van de dubbelzinnigheid van symbolen gebruik te maken is het noodzakelijk om niet constant een onderscheid te maken tussen proces en concept. Daarom is de term '*procept*', een samentrekking van proces en concept, in het leven geroepen. Om de cognitieve structuur aan te houden zeggen we eerst:
Een *elementair procept* is het mengsel van drie componenten [GrayTall94]: een *proces* leidt tot een wiskundig *object* (het concept), en een *symbool* dat wordt gebruikt om ofwel het proces ofwel het object voor te stellen.
Een symbool als 2+3 kan zodoende het proces van optellen voorstellen. Dit proces van optellen produceert vervolgens het concept som, welke het wiskundige object voorstelt. Het symbool kan zodoende het proces van optellen van twee getallen of het concept som oproepen.
Het is goed mogelijk dat hetzelfde object op verschillende symbolische wijzen wordt uitgebeeld. Deze verschillende wijzen worden vaak gezien als verschillende namen voor hetzelfde object. 2+3 kan bijvoorbeeld gezien worden als "een meer dan 4, dus 5", omdat 3 wordt gezien als 2+1 en 2+2 samen 4 maakt, dus 1 meer uitkomt op 5. 2+3 is hierin een elementair procept, maar ook 4+1, 2+1 en 2+2 is dit.
Een *procept* wordt dan als volgt gedefinieerd[GrayTall94]: een *procept* bestaat uit een verzameling van elementaire procepten welke hetzelfde object hebben.
Het procept 5 bestaat zo onder meer uit het tellen van 5, representaties als 2+3, 3+2, 1+4, $10/2$, 7-2, enz.

Volgens Gray en Tall (Gray & Tall, 1994) ligt het onderscheid tussen de betere en slechtere wiskundigen in het gebruik van procepten. De beteren laten meer proceptueel denken zien, terwijl de minderen meer procedureel te werk gaan. De karakteristieken van deze twee vormen van denken kunnen als volgt worden samengevat:

1) *Procedureel denken* wordt gekarakteriseerd door een focus op de procedure en de fysieke of quasi-fysieke hulpmiddelen welke hem ondersteunen. Het beperkende aspect van zulk denken is het zwart-witte beeld dat een leerling heeft van de symbolismes: nummers worden slechts gebruikt als concrete entiteiten welke gemanipuleerd worden door een proces van tellen. De nadruk op de procedure vermindert de aandacht op de relatie tussen in- en uitvoer, welke vaak leidt tot vreemde uitbreidingen op de procedure van tellen, welke niet specifiek tot generalisatie leiden.
2) *Proceptueel denken* wordt gekarakteriseerd door het vermogen om niveaus te comprimeren door middel van manipulatie van symbolen tot op het punt waar symbolen gezien worden als objecten. Deze objecten kunnen vervolgens op een flexibele manier worden ontbonden en weer samengesteld.

Laten we zo bijvoorbeeld kijken naar de simpele opgave 8+5.
Procedureel kan deze eenvoudig worden opgelost als het doortellen vanaf 8 (evt. met behulp van je vingers). Het proces wordt dan: tellen van 8 naar 9, van 9 naar 10, van 10 naar 11, van 11 naar 12 en van 12 naar 13.
Proceptueel gaat het een stuk makkelijker. Het procept 5 kunnen we zien als 2+3. Hierdoor wordt de opgave 8+2+3, zodat de som gelijk wordt aan 10+3, wat gelijk is aan 13.

Een opgave als 8+5 lijkt misschien wel erg eenvoudig. Toch is het voor geen van de lezers altijd even vanzelfsprekend geweest. Er is een heel leerproces aan voorafgegaan, waardoor de lezer dit proces van optellen heeft kunnen opnemen in zijn/haar denk structuur.

2.3 Hoe leren mensen wiskunde?

Om te kijken hoe mensen wiskunde leren, is het handig om te kijken hoe mensen überhaupt leren. Hiervoor gaan we eerst kijken naar hoe het geheugen werkt, wat we daarna specifiek zullen toepassen op de wiskunde.

2.3.1 Hoe werkt het geheugen?

Uiteraard ontstaat een goede wiskundige denkstructuur niet vanzelf. Dit is een voortdurend proces, waarbij telkens nieuwe dingen worden geleerd. In onze samenleving wordt leerlingen vaak niet het proces van wiskundig denken aangeboden, maar eerder het product van wiskundige gedachten(Skemp, 1971). Bij het onderwijzen van jongere kinderen wordt de nadruk gelegd op de synthese van kennis, beginnend bij simpele concepten, opbouwend uit ervaring en voorbeelden naar meer algemene concepten(Tall, 1991).

Om te weten hoe we nu echt wiskunde leren is het misschien handig om eerst meer inzicht te krijgen in hoe ons geheugen werkt. Volgens Tall en Barnard(Tall & Barnard, 2002) kan het geheugen worden opgedeeld in enkele verschillende categorieën.

1) Het episodische geheugen: deze is een herinnering van eerdere gebeurtenissen.
2) Het semantische geheugen: deze stelt de mens in staat om ideeën los te zien van de oorspronkelijke gebeurtenis, toen de ideeën als eerste werden tegengekomen.
3) Het procedurele geheugen: deze zorgt voor de vaardigheid om een aantal activiteiten achter elkaar uit te voeren zonder bewust aan elke stap te moeten denken.
4) Het uitleggend geheugen: deze stelt de mens in staat om informatie op te roepen door het bewust te reconstrueren als dit wordt verlangt. Het heeft dan ook de mogelijkheid om informatie af te leiden uit reeds bestaande informatie.

Het episodisch geheugen kun je zo opvatten als geheugen voor gebeurtenissen. Informatie wordt hierin gekoppeld aan bepaalde omstandigheden, als plaats, tijd en gevoelens. Het semantische als geheugen voor feiten. Het staat los van de omstandigheden waaronder informatie verkregen is. Het procedurele geheugen gaat vervolgens om het weten hoe iets te doen, om de vaardigheden om iets op te lossen. Tenslotte gaat het uitleggend geheugen over het weten waarom iets te doen. Het procedurele en uitleggende geheugen vertrouwen hierbij op een combinatie van episodisch en semantische herinneringen.

Voor de wiskunde houdt dit het volgende in(Tall, 1991):

1) Episodisch geheugen zorgt voor de herinnering aan wat iemand verteld heeft om te doen, hoe iemand iets heeft gedaan, wat iemand heeft gezegd en de emoties die ook op dat tijdstip speelden. Het leren van de wiskunde wordt beïnvloed zowel positief door het onthouden van de ideeën waar de nadruk op is gelegd tijdens de lessen, als positief óf negatief door de emoties die er op dat moment bij kwamen kijken.
2) Het semantische geheugen dient als stevige basis voor conceptuele schakels welke het ene wiskundige idee aan een andere koppelen.
3) Het procedurele geheugen zorgt natuurlijk ervoor dat verschillende stapjes van een probleem achter elkaar kunnen worden uitgevoerd. Tevens verlicht deze de bewuste gedachten, zodat er meer tijd is om aan andere dingen te denken. Hierdoor kun je bijvoorbeeld een algemeen probleemoplossend doel in gedachten houden, onder het uitvoeren van routine handelingen.
4) Het uitleggend geheugen zorgt uiteindelijk voor het maximale inzicht. Vooral in de wiskunde is het vaak mogelijk om bepaalde informatie af te leiden uit andere reeds aanwezige informatie.

Voor het oplossen van wiskundige opgaven, is het procedurele geheugen erg belangrijk. Deze zorgt immers voor het overzicht bij ingewikkelde opgaven en dat de benodigde tussenstappen worden uitgevoerd. Vele van deze tussenstappen zullen moeten worden aangeleerd om uiteindelijk tot een juist resultaat te komen. Dit is een heel leerproces, dat meestal op school gebeurd. We zullen hieronder iets dieper op dit leerproces ingaan.

2.3.2 Het leerproces

Het (her)ontdekken van relaties wordt vaak gezien als een van de meest effectieve manieren voor kinderen om wiskunde te leren. Leren door ontdekken is echter tijdrovend en daarom hebben leraren de neiging dit niet te gebruiken. Centrale vraag blijft echter of de leerlingen die tijd later niet gaan inlopen omdat ze dan efficiënter kunnen gaan leren.

Een wiskundige pakt nu vaak een complex wiskundig idee en vereenvoudigt deze door het in kleinere componenten op te delen en door deze componenten in een logische volgorde te onderwijzen. Vanuit het oogpunt van de experts kunnen deze componenten dan wel als geheel worden gezien. Moeilijkheid voor de leerlingen is dan dat deze vaak nog niet de vele delen als een geheel kunnen zien. De leerling kan de stukjes slechts zien zoals deze worden gepresenteerd, in isolatie, als aparte deeltjes van de puzzel, waarvoor geen totaal beeld beschikbaar is. Er is geen plaatje van de puzzel beschikbaar, dus kunnen de stukjes op zich voor de leerling andere vormen hebben, zodat deze niet in elkaar passen(Tall, 1991).

Het is bij de wiskunde daarom ook erg belangrijk dat leerlingen kunnen representeren en abstraheren(Dreyfus, 1991). Een representatie kan symbolisch of mentaal zijn. Een symbolische representatie wordt uitgesproken of opgeschreven, normaal gesproken met de bedoeling om communicatie over een concept makkelijker te maken. Een mentale representatie daarentegen verwijst naar interne schema's van referenties welke een persoon gebruikt. Deze kan per persoon verschillen.
Vereisten voor abstraheren zijn generaliseren en syntheseren (Dreyfus, 1991). Laten we deze even kort bespreken:
Generaliseren bestaat uit het afleiden van bekenden, identificeren van overeenkomsten en het uitbreiden van huidige domeinen.
Een leerling weet bijvoorbeeld uit ervaring dat een lineaire vergelijking met één variabele hooguit één oplossing heeft, dat een kwadratisch vergelijking met tevens één variabele hooguit twee oplossingen heeft en dat een 3e graads vergelijking met één variabele hooguit 3 oplossingen heeft. De leerling kan dan gaan generaliseren dat voor n^e graads functies met één variabele hooguit *n* oplossingen zijn.
Syntheseren gaat om het combineren of ontbinden van delen, op zo'n manier dat deze een geheel vormen.
Leerlingen leren bijvoorbeeld de concepten sinus, cosinus en tangens apart van elkaar. Het proces waarin ze deze concepten in één geheel samenvoegen heet synthese.

Representeren en abstraheren zijn complementaire processen in tegengestelde richtingen. Aan de ene kant is een concept vaak geabstraheerd van verscheidene van z'n representaties, aan de andere kant zijn representaties altijd representaties van een meer abstract concept.

In termen van representaties kan het leerproces worden gezien als bestaande uit vier fases (Dreyfus, 1991):

1) Het gebruiken van een enkele representatie.
2) Het parallel gebruiken van meer dan één representatie.
3) Het maken van verbindingen tussen parallelle representaties.
4) Het integreren van representaties en het flexibel wisselen tussen deze.

In de eerste fase kan bijvoorbeeld het gebruik van de sinus voor leerlingen worden gezien als slechts een knopje op de rekenmachine. Naarmate leerlingen meer inzicht krijgen, gaan ze over naar de tweede fase. Hier kunnen ze de sinus bijvoorbeeld ook grafisch gaan zien, met behulp van bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek of een eenheidscirkel. Naarmate leerlingen meer verbanden gaan zien, gaan ze over naar de derde fase, waarin ze zich bewust zijn van het onderliggende concept. Verbanden worden gelegd met bijvoorbeeld de cosinus. In de vierde fase gebeurt vervolgens een proces van integratie tussen de verschillende representaties. Waar eerder abstractie was door slechts het concept sinus te behandelen, worden de concepten nu samengevoegd, er ontstaat synthese. De leerling begrijpt het concept nu volledig.

2.4 Het begrijpen van wiskunde

Zoals al opgemerkt, kan het begrijpen van wiskunde worden opgevat als dat de aanwezige kennis en vaardigheden in schema's zijn geordend. Het opnemen van nieuwe kennis in zo'n schema noemen we ook wel assimileren (Kemme, 1990). Indien deze kennis en de huidige schema's strijdig zijn, is een aanpassing nodig voordat deze kennis kan worden verwerkt. Deze structurele aanpassing noemen we accommoderen (Kemme, 1990). Begrijpen wordt zodoende niets anders dan het assimileren van nieuwe kennis in een schema.

Er is veel onderzoek gedaan naar hoe leerlingen komen tot een begrip van wiskunde. In al deze onderzoeken wordt het begrijpen opgedeeld in een aantal fases of niveaus van begrijpen. Bij elk van deze onderzoeken zie je een opbouw van weinig tot geen begrip naar volledig begrip. De niveaus welke doorlopen moeten worden om bij volledig begrip te komen zijn echter anders.

2.4.1 Van Hiele en begrijpen

Pierre en Dina van Hiele hebben veel onderzoek gedaan naar de fases van begrip waar een individu door gaat als deze leert. Het MALATI (MAthematics Learning And Teaching Initiative) heeft hier drie niveaus gekozen welke geschikt zijn voor de wiskunde op school (Bennie, 2000):

1) Het visuele niveau: dit niveau wordt omschreven als het niveau waarop "een leerling identificeert, benoemt, vergelijkt en opereert op geometrische figuren, bijvoorbeeld driehoeken, hoeken, parallelle lijnen, al naar gelang hun voorkomen". Argumenten op dit niveau zijn gebaseerd op een overtuiging en niet op logische conclusies.
2) Het analyse niveau: op dit niveau analyseert een leerling figuren in termen van zijn delen en de relaties tussen deze delen, stelt de eigenschappen van een klasse van figuren vast volgens waarnemingen, en gebruikt eigenschappen om problemen op te lossen.
   De concepten kunnen op dit niveau voor de leerlingen los staan van de situaties waarin ze zijn ontwikkeld. Terminologie en symbolen zijn betekenisvol voor leerlingen en ze kunnen hun eigen definities formuleren. Deze definities worden bindend voor logische argumenten en discussies.
3) Het ordening niveau: het netwerk van verbonden concepten ontwikkelt zich in het analyse niveau en stabiliseert zich op dit niveau. Exacte definities worden

begrepen en geaccepteerd. Er wordt naar deze definities verwezen als leerlingen praten over de vormen. Leerlingen begrijpen de relaties binnen en tussen figuren.

De vooruitgang van het ene niveau naar het andere gaat in vijf fases (Bennie, 2000):

1) Informatie: de leerling raakt bekend met de werkruimte door het materiaal te gebruiken dat aan hem of haar wordt aangeboden. Dit proces zorgt ervoor dat er een bepaalde structuur wordt gevonden.
2) Gerichte oriëntatie: de leerling verkent het onderzoeksveld door het materiaal te gebruiken.
3) Verduidelijking/uitleg: een leerling wordt bewust van het netwerk van relaties, probeert ze in woorden uit te drukken en leert de benodigde technische taal voor de stof.
4) Vrije oriëntatie: het onderzoeksveld van relaties is nog steeds grotendeels onbekend op dit niveau, maar de leerling wordt ingewikkeldere taken gegeven om zijn/haar weg te vinden in dit veld. De taken moeten zo zijn ontworpen dat zij op verschillende manieren kunnen worden uitgevoerd.
5) Integratie: een leerling somt alles dat hij/zij heeft geleerd op over het onderwerp, reflecteert zijn/haar acties en krijgt zo een overzicht over het hele veld dat is verkend.

2.4.2 Zwaneveld en van Dormolen en begrijpen

Zwaneveld en van Dormolen onderscheiden 3 niveaus van begrijpen(Zwaneveld & van Dormolen, 1977):

1) Het receptieve niveau: De leerling geeft aan dat de uitleg is begrepen, maar kan de uitleg niet navertellen in eigen woorden. De uitleg bevat voor de leerling geen onduidelijkheden en geeft geen aanleiding tot een nadere toelichting of herhaling.
2) Het reproductieve niveau: De leerling heeft de uitleg op receptief niveau begrepen en kan de uitleg in eigen woorden reproduceren.
3) Inzicht: De leerling heeft de uitleg op reproductief niveau begrepen en kan het uitgelegde zelfstandig en bewust toepassen in nieuwe situaties

2.4.3 Skemp en begrijpen

Skemp onderscheid drie soorten begrijpen (Skemp, 1979):

1) Instrumentaal begrijpen: het vermogen om een geschikte oplossingsmethode voor een probleem toe te kunnen passen zonder daarbij te weten waarom de methode werkt.
2) Relationeel begrijpen: het vermogen om specifieke regels of procedures af te kunnen leiden uit meer algemene wiskundige betrekkingen.
3) Logisch begrijpen: het vermogen wiskundige symbolen met relevante wiskundige ideeën te verbinden en deze ideeën tot ketens van logische argumentatie te combineren.

Tall voegt hier nog een extra soort van begrijpen aan toe (Tall, 1978): het intuïtieve begrijpen. Intuïtief begrip komt tevoorschijn bij een schema in ontwikkeling, welke nog onvoldoende is voor het doel. Toch zijn er delen van het probleem welke begrepen moeten worden en verbindingen lijken te hebben met het huidige beschikbare schema. Kenmerk hierbij is dat de betrokken persoon niet goed heeft teruggekoppeld op z’n huidige beschikbare schema en de manier hoe hij er over denkt niet goed heeft gerationaliseerd.

Ook praat Tall nog over het Niet-Begrijpen. Het Niet-Begrijpen kan twee dingen betekenen. Ten eerste kan er zijn geassimileerd in een onjuist schema. Ten tweede kan de assimilatie ook in het totaal zijn geweigerd, omdat er geen schema, al dan niet geschikt, beschikbaar is.

2.4.4 De verschillende soorten begrijpen tegen elkaar

Aangezien alle drie de onderzoeken drie verschillende niveaus of fases van begrijpen onderscheiden, zou je zeggen dat deze erg veel overeenkomsten dienen te hebben. Laten we daarom de verschillende niveaus eens naast elkaar leggen en vergelijkingen trekken.

Niveau	Van Hiele	Zwaneveld/van Dormolen	Skemp
1	Visueel niveau	Receptief begrijpen	Instrumentaal begrijpen
2	Analyse niveau	Reproductief begrijpen	Relationeel begrijpen
3	Ordening niveau	Inzicht	Logisch begrijpen

Niveau 1
Hier zie je al direct dat de niveaus verschillende betekenissen kunnen hebben. Het visuele niveau van van Hiele en het instrumentaal begrijpen van Skemp hebben hierbij nog wel iets gemeen, namelijk dat leerlingen wel een oplossingsmethode kunnen toepassen. Bij beide is het bij de leerling niet duidelijk waarom een methode werkt. Bij Zwaneveld en van Dormolen's receptieve niveau kunnen leerlingen echter niet vertellen wat er moet gebeuren om tot een oplossing te komen.

Niveau 2
De verschillen op dit niveau zijn misschien nog wel het kleinst van alle drie de niveaus. Wederom zie je de grootste overeenkomsten bij van Hiele en Skemp. Van Hiele heeft het over een opdeling van een figuur in delen en het gebruik maken van informatie die beschikbaar is over die delen. Skemp heeft het over iets soortgelijks, namelijk het vermogen om regels of procedures af te kunnen leiden uit meer algemene wiskundige betrekkingen. Zwaneveld en van Dormolen hebben het over het in eigen woorden kunnen reproduceren van de uitleg. Dit niveau zit eigenlijk een beetje tussen het eerste en tweede niveau van Skemp in. De leerling kan het wel uitleggen, maar nog niet afleiden.

Niveau 3
Wederom zie je dat van Hiele en Skemp het meeste gemeen hebben. Bij van Hiele worden relaties binnen en tussen figuren begrepen en bij Skemp kunnen symbolen en wiskundige ideeën worden verbonden. Nieuwe definities kunnen worden geformuleerd. Dit gaat een stuk verder dan Zwaneveld en van Dormolen. Zij hebben het slechts over het toepassen in nieuwe situaties.

Het is duidelijk dat van Hiele en Skemp toch enkele overeenkomsten hebben tussen hun niveaus. Het van Hiele model is echter voornamelijk toegespitst op geometrische figuren en is daarom in dit onderzoek minder bruikbaar.
Zwaneveld en van Dormolen's model heeft ook enkele moeilijkheden om toe te passen.
Hoe kun je bijvoorbeeld een leerling classificeren die een aantal nieuwe opgaven weet op te lossen, maar niet kan vertellen hoe hij dit heeft gedaan?
Wanneer is er sprake van een nieuwe situatie? Kun je zeggen dat het oplossen van $y^2+3y+2=0$ anders is dan het oplossen van $x^2+3x+2=0$?

De controle is ook erg moeilijk op receptief niveau. De leerling kan natuurlijk makkelijk zeggen dat hij het goed kon volgen. Dit is echter niet daadwerkelijk te controleren. Hiervoor zal de leerling tenminste een korte globale samenvatting moeten geven, zodat je dan al weer op het reproductieve niveau zit.

De theorie van Skemp heeft deze nadelen niet. Sterker nog, in dit onderzoek is deze zelfs zeer goed te gebruiken, daar verschillende soorten begrijpen sterk terug komen in de oplossing van het probleem. De leerlingen wordt gevraagd het buigpunt te vinden van een zekere 3^e graads functie. De verschillende soorten begrijpen van Skemp kun je dan als volgt omschrijven:

Instrumentaal begrijpen:	De leerling weet dat deze gebruik moet maken van het instrument $\frac{dy}{dx}$ en kan deze ook toepassen.
Relationeel begrijpen:	De leerling ziet de relatie tussen het buigpunt en de mate waarin de grafiek daalt. Hij/zij ziet in dat de daling maximaal is in het buigpunt.
Logisch begrijpen:	De leerling ziet het logische verband tussen de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, $\frac{dy}{dx}$, en de daling. Hij/zij kan de conclusie trekken dat bij maximale daling de $\frac{dy}{dx}$ minimaal moet zijn.

Hieraan valt het intuïtieve begrijpen en het niet-begrijpen van Tall toe te voegen. Deze kun je als volgt omschrijven:

Intuïtief begrijpen:	De leerling weet dat deze ergens gebruik van moet maken, maar kan dit niet toepassen.
Niet-begrijpen:	De leerling weet niet waar deze gebruik van moet maken.

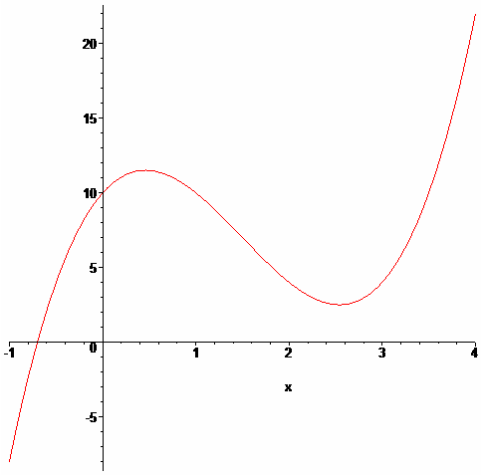
Omdat deze soorten begrijpen erg herkenbaar zijn in dit onderzoek, zullen we dit onderzoek spiegelen aan de theorie van Skemp, aangevuld met Tall. Voordat we tot conclusies komen volgt eerst een omschrijving van het onderzoek.

3. Het onderzoek

Het onderzoek zal plaatsvinden met behulp van enkele 5 Havo leerlingen van Het Bataafse Kamp te Hengelo. Deze leerlingen hebben zojuist het begrip afgeleide behandeld en zouden van grafieken de maxima en minima moeten kunnen bepalen.

3.1 Het probleem

Leerlingen zal worden gevraagd de *x*-waarde van het zogenaamde buigpunt te bepalen van de functie $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 10$.



De term buigpunt is bij de leerlingen niet bekend. De leerlingen zullen daarom extra informatie omtrent deze term moeten krijgen.
Met behulp van de grafiek die ik de leerlingen uitvergroot zal geven, zal ik aanwijzen waar deze ongeveer zou moeten zitten. Tevens zal ik hierbij vertellen dat het buigpunt in dit geval dat punt moet zijn waar de grafiek van toenemend dalen overgaat in afnemend dalen

3.2 De onderzoeksvraag

Dit onderzoek zal gaan kijken naar het verband tussen de verschillen in cognitieve structuur en het al dan niet kunnen toepassen van de huidige kennis in een nieuw probleem. De onderzoeksvraag wordt dan:

> *Wat is de relatie tussen al dan niet succesvolle transfer van bestaande kennis naar het concept buigpunt en de cognitieve structuur van de leerling?*

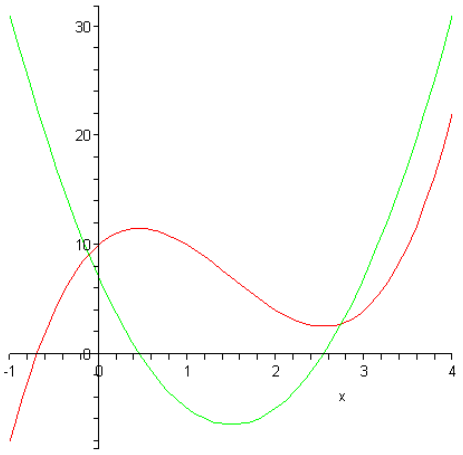
3.3 Het succes van de transfer

Als de leerling zonder enige aanwijzingen dan ook het probleem kan oplossen, kan er sprake zijn van succesvolle transfer. Het kan natuurlijk ook zijn dat de cognitieve structuur reeds aanwezig was. Van dit laatste geval gaan we tijdens dit onderzoek niet uit.

Tijdens het onderzoek meten we hoe succesvol de transfer van bestaande kennis naar het concept buigpunt is door de leerling hardop te laten denken. Dit geeft een beeld over de gedachten van leerlingen en in welke mate deze terug valt op bestaande kennis. Ook geeft dit een inschatting hoe leerlingen deze kennis gebruiken. Gebruiken ze de juiste kennis, en gebruiken ze die ook op een goede manier?
We gaan in dit onderzoek ervan uit dat leerlingen met hogere cijfers voor wiskunde een betere cognitieve denkstructuur hebben. Hierdoor zouden ze meer succes moeten hebben met het toepassen van transfer.
Na het onderzoek zullen we hopelijk duidelijkheid kunnen verschaffen over of deze aannames juist zijn.

3.4 Stappen die de leerling kan zetten

De leerling zal de opdracht krijgen om dit probleem op te lossen met behulp van kennis die ze in het vorige hoofdstuk hebben verkregen.
In dit hoofdstuk hebben ze de volgende formule gehad voor de afgeleide in een bepaald punt:
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, waarbij Δx heel klein wordt genomen.
Als eerste zal het besef moeten komen dat ook hier een vloeiende kromme uit komt, te weten die van de afgeleide functie:



Eenmaal deze grafiek gekregen moet deze geïnterpreteerd worden. Je ziet een dalparabool, waarbij de *x*-as twee keer wordt gesneden. De *y*-waardes passende bij de *x*-waarde van deze parabool zijn de waardes van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij die *x*-waarde in de oorspronkelijke grafiek.

Leerlingen moeten het volgende kunnen interpreteren:

- Links van het linker snijpunt met de *x*-as is de grafiek afnemend positief. Hierbij hoort in de oorspronkelijke grafiek een afnemend stijgende kromme
- Rechts van het rechter snijpunt met de *x*-as is de grafiek toenemend positief. Hierbij hoort in de oorspronkelijke grafiek een toenemend stijgende kromme.
- De snijpunten met de *x*-as zijn de top, respectievelijk dal van de oorspronkelijke grafiek.

Het interessante voor dit probleem zit hem in het nog niet benoemde stukje op de *x*-as. De leerling moet hier het volgende zien:

- De grafiek is negatief, dus is de oorspronkelijke grafiek dalend.
- In het eerste gedeelte wordt de grafiek groter negatief, dus daalt de oorspronkelijke grafiek sterker, dus toenemend
- In het tweede gedeelte wordt de grafiek minder negatief, dus daalt de oorspronkelijke grafiek minder, dus afnemend.

Eenmaal die laatste twee punten door hebbend, zouden leerlingen de conclusie moeten kunnen trekken dat het buigpunt precies zit daar waar de afgeleide grafiek van dalend naar stijgend gaat, dus op de *x*-waarde behorende bij het minimum van de afgeleide grafiek.

Nu zijn alle ‘moeilijke’ stappen genomen en hoeft de leerling nog slechts het minimum van de afgeleide grafiek te bepalen. Hiervoor heeft hij/zij natuurlijk zijn/haar grafische rekenmachine, of de mogelijkheid om ook van deze afgeleide grafiek een afgeleide te nemen en te controleren wanneer deze gelijk wordt aan nul.

Uiteraard is dit niet de enige manier om dit probleem op te lossen. Leerlingen zouden bijvoorbeeld ook gebruik kunnen maken van de symmetrie die aanwezig is in de grafiek. Dit sluit echter niet aan bij de stof die als laatst is behandeld. Hieronder zal kort worden beschreven hoe de leerling gesteund wordt bij zijn weg naar de oplossing.

3.5 De Methodiek

Natuurlijk beginnen de leerlingen niet helemaal vanuit het niets aan zo'n probleem. Tijdens de wiskunde lessen hebben de leerlingen al enige voorkennis opgedaan, welke ze nodig zullen zijn bij het oplossen van dit probleem. De leerlingen weten dat je een afgeleide van een functie kunt benaderen met de volgende functie: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, waarbij Δx heel klein wordt genomen. Tevens is bekend dat een functie stijgend als dalend kan zijn. Ook zijn de leerlingen bekend met de termen toenemend en afnemend stijgend of dalend. Hiernaast zijn de leerlingen bedreven met het invoeren van functies in de grafische rekenmachine.
In de perfecte situatie is de leerling geen enkele sturing nodig bij het oplossen van het probleem. Zo niet, zal de leerling gericht gestuurd moeten worden.
Om te kijken waar de leerling met problemen komt te kampen laat ik de leerlingen hard op denken over hoe deze het probleem kan oplossen. Als de leerling vast komt te lopen is er dan de mogelijkheid om de leerling te sturen. Dit betekent vragen wat er in de leerling opkomt en extra sturen door aandacht te leggen op de instrumenten waarmee het probleem opgelost kan worden. Hierbij kun je denken aan vragen/opmerkingen als:

- Welke eigenschappen zijn er?
- Wat kun je hier mee?
- Hoe deed je dat?
- Wat is dit?
- Schrijf dat eens op papier

Pas als de leerling duidelijk laat blijken echt niet verder te komen, schotel je de leerling een gedeelte van de oplossing voor, zodat deze weer een stap verder kan.
Hierbij kun je denken aan vragen/opmerkingen als:

- Denk aan het afgelopen hoofdstuk
- Ken je het begrip raaklijn/richtingscoëfficiënt?
- Wat heeft de richtingscoëfficiënt te maken met de oorspronkelijke grafiek?
- Wat heeft de richtingscoëfficiënt te maken met dalen en stijgen?

De interviews zullen worden opgenomen op een voicerecorder en uitgeschreven worden toegevoegd in de bijlage, waarna deze gesprekjes worden geanalyseerd aan de hand van de theorie van Skemp, aangevuld met Tall. Hieronder zullen we de resultaten bespreken.

4. Resultaten

4.1 De Leerlingen

Het onderzoek is uitgevoerd met behulp van 4 leerlingen; Marit, Lindsey, Stein en Robert. Al deze leerlingen zitten in 5 Havo en volgen Wiskunde A. Deze leerlingen hebben pas geleden een hoofdstuk afgerond welke grotendeels ging over maxima en minima van functies. Hier hebben ze de term afgeleide behandeld. Dit heeft het boek gedaan middels de volgende formule: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, waar wordt uitgelegd dat Δx erg klein moet worden gemaakt. De leerling kan niet differentiëren, maar middels de grafische rekenmachine zou de leerling toch in staat moeten kunnen zijn om een richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt te bepalen.

4.2 Verschillende stappen

In dit onderzoek heb ik de leerlingen zo veel mogelijk zelf laten nadenken welke stappen deze moet zetten. Als deze vast liep, heb ik geprobeerd kleine aanwijzingen te geven, waardoor de leerling toch een stap verder kan.
Hoewel leerlingen wellicht op andere oplossingen komen heb ik, rekening houdend met het zojuist behandelde hoofdstuk, het probleem onderverdeeld in enkele stappen welke de leerling moet zetten. Dit zijn:

1. De leerling moet inzien dat bij de overgang van toenemend dalend naar afnemend dalend de grafiek maximaal daalt.
2. De leerling moet de conclusie trekken dat als de grafiek maximaal daalt, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt minimaal moet zijn.
3. Wetende dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn minimaal is, moet de leerling deze richtingscoëfficiënt bepalen. Hiertoe moet de leerling eerder genoemde functie invoeren in de grafische rekenmachine.
4. Als de leerling de functie heeft ingevoerd moet het minimum hiervan worden gezocht.
5. De laatste stap is vervolgens aflezen welke *x*-waarde hoort bij de minimumwaarde van deze afgeleide functie.

4.2.1 Stap 1

Het duurde even voordat Marit dit doorhad. Zonder de exacte woorden maximale daling in de mond te nemen, kwam ze toch tot de conclusie dat de functie op een bepaald gedeelte meer daalde dan elders. Dit kreeg ze door op de rekenmachine de functiewaardes af te lezen en deze te vergelijken met elkaar. Door dit een beetje grofweg in te schatten kwam ze tot de conclusie dat er tussen bepaalde getallen (rondom *x* gelijk aan anderhalf) een groter verschil zat dan hiervoor en hierna.

Lindsey kwam eigenlijk helemaal niet op deze stap. Pas op het eind, nadat ze het antwoord al had gegeven, kwam ze ongeveer tot deze conclusie. Ongeveer, aangezien ze het in plaats van het meest dalen, over het minst dalen had.

Ook Stein kwam niet op deze stap. Zelfs toen ik zei dat je dat punt wil hebben waar hij van zo groot mogelijk dalen minder hard gaat dalen kwam hij niet op het idee dat het om een uiterste waarde zou gaan.

Robert sloeg deze stap helemaal over. Hij had direct een plan van aanpak in gedachten, waarbij hij wilde kijken naar verschillen tussen bepaalde waardes. Uiteindelijk heeft hij de term maximum of minimum ook helemaal niet gebruikt.

4.2.2 Stap 2

Omdat een van de meest voorkomende termen van het vorig behandeld hoofdstuk $\frac{dy}{dx}$ was, kon Marit wel verder. Dit echter zonder te weten waarnaar ze op zoek was. Dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn minimaal moest zijn is dan ook niet in haar opgekomen.

Lindsey daarentegen kwam wel op deze stap. Hiervoor had ze wel even een kleine hint nodig over wat de richtingscoëfficiënt was in de toppen. Zelf kwam ze vervolgens met de opmerking dat we dit punt zochten waar de richtingscoëfficiënt het laagste is. Een erg goede opmerking!

Ook Stein kwam uiteindelijk tot deze stap. Hier had hij echter wel meer hulp voor nodig dan Lindsey. Waar Lindsey deze stap maakte voordat ze de richtingscoëfficiënt ging berekenen, maakte Stein deze stap pas hierna. Ook hij kwam zelf wel met het idee om iets met raaklijnen te gaan doen, maar ook hier was het weer omdat het vorige hoofdstuk dit behandelde. Nadat hij de oorspronkelijke grafiek en de grafiek van de afgeleide in één scherm zag, kwam hij na enig aandringen tot de conclusie dat het buigpunt bij die *x*-waarde ligt ligt, waar de afgeleide een dal heeft.

Zoals eerder gezegd heeft Robert het helemaal niet over maxima of minima gehad. Hij heeft puur gekeken naar de symmetrie in de verschillen.

4.2.3 Stap 3

Marit wist dat ze de richtingscoëfficiënt van de raaklijn moest uitrekenen, hoe was echter een groot probleem. Door vragen te stellen als wat is Δy kwam ze tot een formule. Om deze formule in de rekenmachine te krijgen leverde echter veel problemen op. Het omschakelen tussen de formule die ze had (met *f(x)*) en die welke in de rekenmachine ingevoerd moet worden (*y2=*) was een erg moeilijke stap, eentje die bijna helemaal voorgezegd moest worden.
Lindsey kon uiteindelijk ook wel tot een formule komen om in te voeren. Ook bij haar was het invoeren weer een groot probleem. Ook bij haar moest ik dit bijna helemaal voordoen.

Stein had veel moeite om tot de formule te komen. Zelfs nadat ik hem had voorgezegd kwam deze niet bekend bij hem voor. Pas nadat hij hem had opgezocht in het boek ging bij hem een belletje rinkelen. Maar ook voor hem was de omschakeling van *f(x)* naar *y2* erg ingewikkeld.

Robert kwam bijna zelfstandig tot een algemene formule welke ingevoerd moest worden. Niet een om de richtingscoëfficiënt uit te rekenen, maar om de verschillen te berekenen tussen

verschillende punten. Dit deed hij door voor verschillende punten op te schrijven wat je wou berekenen. Zodoende kon hij deze veralgemeniseren. Ook tegen hem moest gezegd worden dat *f(x)* = overeenkomt met de *y2=* op de rekenmachine. Hierna had hij het echter wel erg snel door. Hij keek alleen wel verkeerd aan tegen de Δx, waarvan hij dacht dat dit een knop op de rekenmachine was.

4.2.4 Stap 4

Echt in de gaten dat er een minimum zat had Marit niet. Het viel haar op dat de afgeleide functie steeds meer negatief werd en op een gegeven moment minder. Dat hier dan ook een minimum bij hoorde kwam niet direct in haar op.

Ook Lindsey had moeite om het in de juiste bewoording te zeggen, terwijl ze wel het goede bedoelde. Lastig voor haar was dat bij de minimale waarde van de afgeleide grafiek de maximale daling hoorde. Het minimum kon ze wel makkelijk opzoeken met de minimum-functie op de rekenmachine.

Doordat Stein al een paar ingewikkelde stappen had moeten zetten was hij ook even de weg kwijt hoe hij normaal een minimum berekent. Dit terwijl hij in het begin al bijna had verteld hoe hij normaal gesproken een minimum opzocht.

Robert keek niet specifiek naar het minimum. Hij had al snel in de gaten waar het juiste punt lag, door te kijken naar de symmetrie. Ook een erg goede manier van oplossen.

4.2.5 Stap 5

Met een beetje hulp kon Marit er achter komen dat het minimum bij anderhalf zat. Ze had niet in de gaten dat ze er nu eigenlijk al was en de anderhalf zo kon aflezen.

Lindsey kon ondanks de vele moeilijke stappen die ze gezet had wel makkelijk het minimum vinden. Dit deed ze op de manier zoals ze het altijd al gedaan had, met CALC->Minimum.

Stein daarentegen had iets meer moeite. Dit kwam doordat hij in plaats van op de minimum-knop op de maximum-knop drukte. Dit kon echter snel hersteld worden.

Zoals gezegd keek Robert naar de symmetrie in de getallen. Op die manier kwam hij ook snel tot de conclusie dat het minimum bij anderhalf lag.

5. De leerlingen en Tall

Aan de hand van de interviews kunnen we de antwoorden van de leerlingen in het licht zetten van de eerder besproken literatuur. Zoals eerder gezegd zullen we hier gaan kijken naar de leerlingen en het begrijpen zoals Skemp deze interpreteerde. Dit aangevuld met het intuïtieve en het niet-begrijpen van Tall.

5.1 Marit

Vanaf het begin heeft Marit al problemen met deze opgave. Ze heeft werkelijk geen idee hoe een dergelijk probleem aan te pakken. Pas nadat ik haar heb verteld dat het misschien wel iets te maken heeft met wat ze afgelopen hoofdstuk heeft behandeld, kan ze iets verder. Ze gaat denken aan een oplossing met behulp van de afgeleide. Hoe je aan deze afgeleide komt weet ze goed te vertellen. Hoe je deze bij dit probleem kunt toepassen komt niet in haar op. Duidelijk een geval van het Niet-Begrijpen. De kennis is wel geassimileerd in een schema, maar dit schema is blijkbaar onjuist. In ieder geval zijn alle verbindingen nog niet goed gelegd.

Een doorbraak komt als Marit goed gaat kijken naar de functie. Het valt haar op dat er een verschil zit in hoeveel de functie daalt tussen verschillende punten. Ze kan echter niet direct de link leggen dat wat ze hier bedoelt de Δy is. Wederom een teken van verkeerde assimilatie.

Als ze uiteindelijk een formule heeft gekregen om de Δy te berekenen, kan ze deze niet omzetten naar de grafische rekenmachine. Deze stof moet ze een jaar eerder hebben gehad, maar is blijkbaar helemaal niet opgenomen in wat voor schema dan ook. Een geval van totale weigering van assimilatie.

Nadat ze uiteindelijk de juiste formule in de rekenmachine heeft, weet ze de dan verkregen gegevens wel goed te interpreteren. Ze valt hierbij weer terug op de eerdere opmerking dat er een verschil zit tussen verschillende waardes. Een vorm van logisch begrijpen.

Het aflezen van het juiste punt geeft nog wel enige moeilijkheden. Marit wil de stapjes nog kleiner maken, wat op zichzelf geen slecht idee is. Des te meer je dit doet, des te nauwkeuriger het antwoord wordt. Ik was echter al tevreden met het antwoord anderhalf.

Kort samengevat kun je dus de volgende vormen van begrijpen terug vinden bij Marit:

Niet Begrijpen	Het kunnen toepassen van de afgeleide op dit probleem.
	De link tussen de term Δy en het verschil in functiewaarden.
	Het omzetten van de formule naar de grafische rekenmachine
Logisch begrijpen	Het interpreteren van de gegevens op de grafische rekenmachine door terug te vallen op de opmerking dat er verschil zit tussen verschillende waardes

5.2 Lindsey

De inburgering van de grafische rekenmachine lijkt in het begin groot bij Lindsey. Ze denkt eerst dat dit probleem misschien wel eenvoudig is op te lossen met een knop op de rekenmachine. Helaas moet ik haar teleurstellen. Dat ze erg afhankelijk is van de rekenmachine blijkt uit meerdere antwoorden van haar:

Ik: "Ok, die kun je in ieder geval dus uitrekenen."
Lindsey: "Ja, met de rekenmachine."

Of uit de volgende opmerking:
Lindsey: "Ik deed het alleen met de rekenmachine, dat was het makkelijkst."

Na enig doorvragen blijkt dat Lindsey toch niet volledig afhankelijk is van de rekenmachine. Zo weet ze prima te vertellen dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de toppen gelijk is aan nul. Met hulp van deze informatie komt ze tot de uitstekende conclusie:

Lindsey: "Nee, dan moet je kijken waar de richtingscoëfficiënt juist het laagst is. Wat het kleinste is toch en dan dat punt."

Een prima voorbeeld van logisch begrijpen. Ze kwam eenvoudig tot de conclusie dat vanaf de top, waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn nul is, de richtingscoëfficiënt steeds kleiner en kleiner wordt, totdat deze weer iets groter wordt en in het dal wederom gelijk is aan nul. Uit deze informatie wist ze af te leiden dat het gewenste punt daar lag, waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn het kleinst is. Een erg goede conclusie.

Ook Lindsey heeft hierna problemen om deze richtingscoëfficiënt uit te rekenen. Hoewel ze normaal gesproken eigenlijk alles op de rekenmachine doet, weet ze zich in dit geval geen raad. Hierom probeer ik met haar te komen tot een formule welke ze in moet vullen. Bij haar is het duidelijk een geval van de klok horen luiden, maar niet weten waar de klepel hangt. Als ze terugdenkt aan de pas behandelde stof, weet ze wel iets over stukjes die je steeds kleiner ging maken, maar niet hoe je dit toe moest passen. Hier zie je dus weer een geval van niet-begrijpen.

Uiteindelijk hebben we de formule op papier staan. De volgende moeilijkheid is dan deze in te voeren in de rekenmachine. Ook bij Lindsey zie je hier weer dat haar dit niet zelfstandig lukt. Wederom een geval van niet-begrijpen.

Nadat Lindsey de juiste formule heeft ingevoerd, gebeurt iets vreemds. Waar ze eerder had verteld dat je op zoek moet naar dat punt waar de richtingscoëfficiënt het laagst is, heeft ze ineens veel moeite om het juiste punt te vinden. De eerder getrokken conclusie is blijkbaar niet opgenomen in een schema.

Je ziet hier ook duidelijk een omslag in Lindsey. Waar ze eerst nog van alles wou proberen en ook wel op het goede spoor zat, zie je dat nadat ze de formule op de rekenmachine moest invoeren een beetje het vertrouwen kwijt is. Dit ook getuige haar opmerking:

Lindsey: "Ik ben ook niet goed in wiskunde."

Bij Lindsey kun je dus de volgende vormen van begrijpen onderscheiden:

Niet begrijpen	Niet weten hoe de pas behandelde stof moet worden toegepast.
	Het invoeren van de formule in de grafische rekenmachine
	Het niet assimileren van het inzicht verkregen via ondervermeld logisch begrijpen
Logisch begrijpen	Het inzicht dat je moet kijken daar war de richtingscoëfficiënt het laagst is.

5.3 Stein

Net als bij Lindsey doet ook Stein erg veel met de grafische rekenmachine. Hij heeft ook dezelfde reden, namelijk dat dit veel makkelijker is. Toch was een van de eerste dingen die in hem opkwam dat hij bij het bepalen van een top een raaklijn moet tekenen en dat hij zeker $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ moest doen. Dit is een duidelijk voorbeeld van intuïtief begrijpen. Hij weet dat hij het toe moet passen, maar waarom dit werkt en hoe hij het toe moet passen is voor hem niet bekend, de verbindingen zijn nog niet compleet maar er zijn wel enkele aanwezig.

Bij het horen dat je $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ook zonder een bepaalde knop op de rekenmachine berekend kan worden kijkt hij verbaasd op. De betreffende formule die daarbij hoort zegt hem ook helemaal niets, totdat deze opzoekt in het boek. Met behulp van het plaatje dat hierbij staat begint hem weer iets te dagen. Deze stof is duidelijk niet geassimileerd en zodoende is hier een vorm van niet-begrijpen.

Met het invoeren van de formule in de rekenmachine had Stein de minste moeite van alle leerlingen. Blijkbaar is dit iets dat wel goed in een schema is geassimileerd. Het is bij hem echter nog niet direct duidelijk wat hij hier mee kan. Ik moet hem dan ook de juiste kant op duwen dat hij hier mee verder gaat.

Met het interpreteren van de gegevens heeft Stein ook grote moeite. Zijn instrumentaal begrip hierin is dan ook hoog. Hij weet niet dat als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief is, de grafiek stijgt. Dit is wederom een vorm van niet-begrijpen.

Zodra hij echter in de gaten heeft dat het positief en negatief zijn van de richtingscoëfficiënt te maken heeft met het stijgen en dalen van de oorspronkelijke grafiek, trekt Stein snel zijn conclusies. Het gevraagde punt moet daar liggen waar de grafiek van de afgeleide weer begint te stijgen. Hier komt weer duidelijk een vorm van relationeel begrijpen naar boven.

Voor een leerling die bijna alles op de rekenmachine doet gaat Stein hierna nog wel flink in de fout door niet te kiezen voor de minimum-functie, maar de maximum-functie. Dit is waarschijnlijk gewoon een typfoutje en is hem vergeven.

De volgende vormen van begrijpen zijn bij Stein te onderscheiden:

Niet begrijpen	Het overzicht dat er bij de term $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ook een bepaalde functie hoort.
	Niet weten dat als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief is, de grafiek stijgt.
Intuïtief begrijpen	Het zeker weten dat je voor de oplossing $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ moet gebruiken
Instrumentaal begrip	Het gebruik van de grafische rekenmachine.
Relationeel begrijpen	De conclusie dat het gevraagde punt daar moet liggen waar de grafiek van de afgeleide weer begint te stijgen.

5.4 Robert

Robert is de enige die vanaf het begin af aan al een idee heeft hoe hij dit probleem aan kan pakken. Hij kan dit echter niet precies onder woorden brengen. Hij ziet direct in dat het gaat om de verschillen die er zitten in de *y*-waardes, met vaste *x*-afstand. Duidelijk een geval van relationeel begrijpen.

Op papier kan hij duidelijk krijgen wat hij wil doen. Dit omzetten naar de rekenmachine geeft hem wel problemen. De koppeling tussen *f(x)*= en *y1*= is hem niet duidelijk. Dit is niet opgenomen in een schema. Wederom een geval van niet-begrijpen.

In tegenstelling tot alle andere leerlingen berekent Robert niet de afgeleide functie, maar slechts de Δy. Hij weet deze wel goed te interpreteren en komt erg snel met het goede antwoord. Dit doet hij door te kijken naar de symmetrie tussen de getallen. Wederom een geval van relationeel begrijpen.

De volgende vormen van begrijpen komen bij Robert naar voren:

Niet begrijpen	Het omzetten van de formule naar de grafische rekenmachine
Relationeel begrijpen	Het inzicht dat het hier gaat om de verschillen die zitten in *y*-waardes, met vaste *x*-afstand.
	Het interpreteren van de Δy-waardes door gebruik te maken van symmetrie en zodoende tot het antwoord te komen.

6. Conclusies

Het is me een beetje tegengevallen hoeveel moeite de leerlingen hadden met dit probleem. Ik had verwacht zo hier en daar wat aanwijzingen te moeten geven. Het bleek echter al snel dat de meeste leerlingen erg veel aanwijzingen nodig hadden. Alleen Robert is grotendeels zelfstandig tot een oplossing gekomen.
In de manier van denken zie je wel duidelijk verschillen tussen de verschillende leerlingen. Bij Marit zie je dat de compressie niet goed is. Ze kan geen link leggen tussen het symbool Δy en het verschil in y-waarde tussen punten, een goed voorbeeld van procedureel denken.
In haar denkstructuur zijn de verbindingen tussen verschillende cognitieve units niet goed gelegd. Toch zie je bij haar wel een goede vorm van synthese, als ze de gegevens van de rekenmachine gaat interpreteren. Door middel van het combineren van verschillende zaken weet ze zodoende tot een juist antwoord te komen.

Lindsey daarentegen vertoont wel tekenen van goede compressie. Ze weet dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de toppen gelijk is aan nul en kan hier uit afleiden dat het hier gaat om het punt waar de richtingscoëfficiënt het laagst is. Er zijn blijkbaar goede verbindingen welke voor een goede denkstructuur zorgen. Zodoende kan ze uitstekend syntheseren.
Toch blijkt de compressie iets later niet voldoende te zijn voor het oplossen van dit probleem. Het opstellen van een formule voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is een probleem voor haar. Het lijkt erop dat dit helemaal niet is opgenomen in haar denkstructuur.
Opvallend bij Lindsey is de werking van haar procedurele geheugen. Waar ze in het begin een erg waardevolle stap maakt door te zeggen dat je moet kijken naar het punt daar waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn minimaal is, lijkt ze deze informatie later te zijn vergeten. Dit getuigt van een erg zwak procedureel geheugen.

Je ziet bij Stein nog iets meer dan bij Lindsey dat hij erg verknocht is aan de grafische rekenmachine. Deze zit dan ook nauw verstrengeld in zijn denkstructuur. De achterliggende theorie ontbreekt nagenoeg bij hem. Er is sprake van een erg slechte compressie. Hij is een duidelijk voorbeeld van een procedurele denker, waarbij de rekenmachine zijn favoriete hulpmiddel is.

Duidelijk is dat Robert de minste moeite van alle leerlingen heeft met dit probleem. Hij ziet bijna direct dat het gaat om de Δy. Hij beschikt blijkbaar over een krachtige denkstructuur, waarbij verbindingen tussen cognitieve units goed zijn gelegd. Toch is zijn denkstructuur niet zo krachtig dat via symbolen een compressie is. Hij houdt goed overzicht wat hij wil doen en kan dit goed opdelen in kleine stapjes, hierbij de procedure om dit te doen goed in de gaten houdend. Wederom een voorbeeld van procedureel denken.
Waarom hij toch relatief weinig moeite heeft om dit probleem op te lossen zit hem waarschijnlijk in dat hij zowel een sterk semantisch, als procedureel geheugen heeft. Hij kan makkelijk wiskundige ideeën aan elkaar koppelen en blijft hierbij het overzicht houden. Op deze manier lost hij dit probleem zonder veel moeite op.

Op basis van dit onderzoek zou je verwachten dat, op Robert na, de leerlingen niet erg sterk zijn in wiskunde. Dit zou moeten worden weerspiegeld door de rapportcijfers van de verschillende leerlingen. Deze zijn de volgende:

Marit	6+
Lindsey	4,5
Stein	5
Robert	7+

Je ziet hier inderdaad dat Robert er bovenuit springt. Stein en vooral Lindsey zijn zoals verwacht erg zwakke leerlingen. Hoewel ze geen heel hoog cijfer heeft, redt Marit zich blijkbaar toch wel aardig. Een 6 is echter geen cijfer welke weergeeft dat je de stof uitstekend beheerst. Meestal betekent een 6 dat je de basisstof beheerst. Deze is goed te oefenen met de sommen uit het boek en heeft hierdoor misschien ook wel meer te maken met motivatie dan met wiskundig inzicht.

6.1 Succes bij transfer

Dit onderzoek bevestigt de theorie van Tall, zoals eerder besproken. Je ziet duidelijk dat een leerling die een goede compressie heeft in cognitieve units en goede verbindingen kan leggen tussen deze, dit probleem beter kan oplossen dan een leerling die dit niet kan.
Dit betekent dat deze leerling:

- het probleem beter kan opdelen in sub-problemen en hierbij het overzicht kan bewaren
- minder inspanning nodig is om het probleem op te lossen
- meer begrip heeft van de voorkennis
- problemen makkelijker zelfstandig kan oplossen

Natuurlijk is het erg lastig om een conclusie te trekken uit de antwoorden van slechts 4 leerlingen. Groter onderzoek kan deze conclusies onderbouwen, of juist onderuit halen. Het is natuurlijk ook de vraag of deze conclusies geldig blijven als je leerlingen kiest met een andere voorkennis, of die geen rekenmachine mogen gebruiken. Zo ligt er nog alle ruimte om dit onderzoek voort te zetten.

7. Literatuur

(Bennie, 2000) Bennie, K. (2000, 4 februari). The van Hiele Theory. Gedownload 2 december, 2005, van http://www.wcape.school.za/malati/vanHiele.pdf

(Dreyfus, 1991) Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

(Gray & Tall, 1994) Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual view of simple arithmetic. *The journal for research in mathematics education, 26(2)*, pp 115-141.

(Kemme, 1990) Kemme. S. (1990), Uitleggen van wiskunde. Proefschrift, Universiteit van Utrecht, Utrecht.

(Skemp, 1971) Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex: Penguin.

(Skemp, 1979) Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning and Action: a foundation for theory and practice in education*. New York, Brisbane, Toronto: Wiley&Sons, Chichester.

(Tall, 1978) Tall, D. (1978). The dynamics of understanding mathematics. *Mathematics teaching, 81,* 50-52.

(Tall, 1991) Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

(Tall, 1995) Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira, & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of X1X International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 61-75

(Tall, 2000) Tall, D. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers. In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, & Jen-Chung Chuan (Eds.), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 3-20). Chiang Mai, Thailand: ATCM Inc, Blackwood.

(Tall & Barnard, 1997) Tall, D. & Barnard, T. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. *Proceedings of PME, 2,* 41-48.

(Tall & Barnard, 2002) Tall, D. & Barnard, T. (2002), *Cognitive Units, Connections and Compression in Mathematical Thinking.* Ongepubliceerd paper. Warwick University, Coventry.

(Tall & Vinner, 1981) Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151-169.

(Thurston, 1990) Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society, 37(7)*, 844-850.

(Verhoef, 2003) Verhoef, N. (2003). Implementatie van ICT, een probleem voor docenten? Proefschrift, Universiteit Twente, Enschede.

(Vinner, 1991) Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp 65-81). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

(Zwaneveld & van Dormolen, 1977) Zwaneveld, B. & Dormolen, J. van (1977). Handelen om te begrijpen : een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.

Bijlage 1: Marit

Na Marit uitgelegd te hebben dat ik op zoek ben naar dat punt waar de grafiek omslaat van toenemend dalend naar afnemende dalend, vraag ik haar of ze enig idee heeft hoe ze dit probleem kan aanpakken.

Marit: "Geen flauw idee. Ja misschien, zo ongeveer ja.."
Ik: "Goed, waar zou die ongeveer kunnen liggen?"
Marit: "Ja, één komma…."
Ik: "Ja, daar zal hij vast ergens liggen. Dat denk ik ook wel. Maar waar ligt hij nu precies?"
Marit: "Ehm, je kan de *x* invoeren in de formule. Is daar een bepaalde formule voor?"

Ik vertel haar dat daar wel een formule voor is, maar dat zij deze niet heeft gehad en dus niet kan weten. Vervolgens zeg ik haar dat er ook een andere manier is, welke gebruik maakt van stof die in het vorige hoofdstuk is behandeld en vraag haar waar dat hoofdstuk over ging.

Marit: "$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Wat verder nog meer, nou ja daar ging het bijna allemaal over."
Ik: "Ja, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wat kon je daar allemaal mee?"
Marit: "Eh, gemiddelde stijging in een punt bepalen en de snelheid."
Ik: "Ehm, ja. En wat willen we hier? Je ziet hij daalt en hij daalt steeds harder, totdat hij op een gegeven moment zachter gaat dalen."
Marit: "Dan moet je een paar punten berekenen en kijken waar die….."

Marit komt niet echt uit haar woorden dus vraag ik haar om maar gewoon eens op papier te zetten wat ze ongeveer wil gaan doen. Ze gaat aan de slag en tekent 2 punten op papier, waarmee ze de Δy en Δx wil uitrekenen.

Marit: "Dan moet je steeds een kleiner stuk nemen. Dan ga je bijvoorbeeld eerst dit stuk nemen of tussen 1 en 2 bijvoorbeeld. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$."
Ik: "Kan."
Marit: "Ja en dan steeds kleiner nemen."
Ik: "Ok, dat gaat de goede kant op."
Marit: "Moet ik dat gaan doen dan?"
Ik: "Ja, probeer maar gewoon."
Marit: "Nou, bij 2 is ie… Ja dat kan ik eigenlijk niet goed aflezen."

Hier komt Marit even vast te zitten. Op het plaatje zit namelijk geen rooster, waarmee ze de punten mooi kan aflezen. Daarom spoor ik haar maar aan om de rekenmachine er maar eens bij te halen.

Marit: "Oh ja, tuurlijk. Dan kan je toch meteen alles aflezen?"
Ik: "Kan de rekenmachine dat?"
Marit: "Hij kan wel Δyx uitrekenen?"
Ik: "Ja, ok. Dat kan hij."

Na het invullen van de formule in de rekenmachine komt er een heel ander plaatje tevoorschijn dan welke ik heb uitgedeeld op papier. Marit heeft duidelijk problemen om een window te kiezen.

Marit: "Hoe kan ik nu het goede punt vinden dan? De grafiek ziet er zo heel anders uit."
Ik: "Is dat lastig dan, als je dit plaatje al hebt?"
Marit: "Ja, vind ik wel. Je weet nooit welk window je moet nemen."
Ik: "Nee? Ook niet als je dit plaatje al hebt, weet je niet welk window je moet nemen?"
Marit: "Oh ja, ja. Daar denk je helemaal niet aan."
Ik: "Zo heb je een mooi plaatje."
Marit: "Nu kan ik hem zetten op een punt."
Ik: Goed, maar nu ga je er vanuit dat 1,5 ook echt het punt is en dat weet je nog niet zeker, toch?"
Marit: "Nee.
Dan ga je kijken als je verder gaat wat er daarna…..
Ja het wordt wel steeds minder, maar ja"
Ik: "Ja goed, dat wordt ie op dat hele stuk."
Marit: "Ja. Maar hier zit een grotere waarde tussen dan daar."
Ik: "Ok, daar kunnen we op zich wel mee verder."

Zonder het zelf te weten heeft Marit hier een vrij grote stap gezet. Ze weet alleen niet hoe ze nu verder moet. Een lange stilte volgt.

Ik: "Je zei net al iets met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Kunnen we hier misschien ook iets daarmee doen? Kun je die tabel zo krijgen dat je bijvoorbeeld hier Δy gedeeld door Δx komt te staan?"
Marit: "Ja, dat kan misschien wel. Moet je volgens mij, even kijken hoor
Of moet je hier gewoon, ik weet niet of je hier wel wat kunt invullen."
Ik: "Nou, wat is de Δy? Wat is dat eigenlijk?"
Marit: "2 punten en dan hoeveel dat afneemt of toeneemt."
Ik: "Ja, dus Δy is zeg maar… "
Marit: "Van dat paar"
Ik: "*y2* min?"
Marit: "*y1*."

Nu ze een manier heeft om Δy te berekenen, probeer ik of het haar lukt dit ook in de rekenmachine te zetten. Dit lukt eigenlijk niet zonder problemen.

Ik: "Dit kun je op de rekenmachine invullen, toch?"
Marit: "Jawel. Hoe kun je dat er inzetten dan?"
Ik: "Dat heb je volgens mij vorig jaar gehad."
Marit: "Ja, of hier, maar ik weet niet bij welke je dat moet invullen. Of je dat nou in de lijsten moet invullen, of eh gewoon hier. Hier kun je het ook invullen."
Ik: "Ik zou het daar doen ja."

Ze is nu op de plaats waar ze de formule kan invullen. Er ontstaat nu verwarring tussen de term *y2* van de rekenmachine en de *y*-waarde van punt 2 welke ze wil invullen. Deze kan Marit niet uit elkaar houden.

Ik: "Dus nu heb je *y2 = y2*. Dat klopt natuurlijk altijd. *y2* is altijd *y2*. Maar daar kan hij niet mee rekenen, toch? Je moet hier de waarde van *y* in punt 2 invullen. Hoe kom je daar aan, als je deze formule al hebt?"
Marit: "Dan moet je die *x* invullen in deze formule."

Hierna proberen we door verschillende dingen op papier te zetten tot een goede formule te komen welke in de rekenmachine ingevoerd moet worden.

Ik: "Goed, je weet dus dat je voor de *y*-waarde hier *f(x2)* moet invullen. Wat wordt dan de *y*-waarde in punt 1?"
Marit: "Dat is dan *f(x1)*?"
Ik: "Ja, dus als je Δy wilt uitrekenen voor deze 2 punten dan doe je?"
Marit: "*f(x2)-f(x1)*?"
Ik: "Ja, maar als je dat zo houdt, bereken je het maar voor 2 punten en niet voor alle."
Marit: "Ja, maar hoe doe je dat dan voor alle?"
Ik: "Dan moet je die *x2* afhankelijk maken van *x1*."
Marit: "huh?"
Ik: "Nou, kun je *x2* ook anders schrijven, bijvoorbeeld als *x1* + ….?"
Marit: "Dat is dan *x1* + 0,5."
Ik: "In dit geval wel ja. Wat is die 0,5 hier?"
Marit: "Tja,…."
Ik: "Je had het al eerder over iets met die stukjes kleiner maken, hoe heette dat daar?"
Marit: "Δx?"
Ik: "Inderdaad. Je hebt nu dus eigenlijk hier staan $f(x+\Delta x)-f(x)$
Marit: "Oh ja."
Ik: "Nou, dit kun je invullen $f(x+\Delta x)-f(x)$, alleen dan is het dus geen *f*, maar *y1*."
Marit: "Ja."
Ik: "*y1* kun je dus invullen op de rekenmachine."
Marit: "Maar je hebt hier toch al die formule?"

Ik: “Ja, die formule heb je. Dat is *y1* dus *y1* is *f(x)*. daar kun je gebruik van maken. Als je dan dit wilt berekenen, *y* in het 2e punt bereken je dus die van de $x + \Delta x$. Daar komt dus die *y*-waarde uit en in het eerste punt heb je die functiewaarde van de *x*. Dat is dan die *y1*. Die ander de *y2*.”
Marit: “Ja, maar die moet ik dus invullen.”
Ik: “Die kun je invullen.”
Marit: “Gewoon hier?”
Ik: “Ja, bij *y2* = kun je die invullen.”

Marit heeft nog geen enkel idee hoe je deze formule kunt invoeren in de rekenmachine. Ik geef haar dan ook maar de tip om de *f* in dit geval te verwisselen met *y1*. Dit lukt haar.

Marit: “Mag ik daar gewoon die *x* pakken?”
Ik: “Je mag gewoon de *x* pakken.”
Marit: “Maakt niet uit wat voor waarde dan?”
Ik: “Nee, denk even aan je haakjes.”
Marit: “Dan plus Δx.”
Ik: “Ja, wat moet je Δx nemen?”
Marit: “Ja dit hier.”
Ik: “Ja, dan is hij vrij groot. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dan nam je hem toch altijd heel klein he?”
Marit: “Kan ook, nul komma 1 bijvoorbeeld.”
Ik: “Kan ja.”
Marit: “Of nul komma nul nul 1 kan ook, bijna alles wat je wil.”

Ze heeft nu het volgende op het scherm staan: *y2*=*y1*(1.5 + 0.001)

Ik: “Kijk dan heb je dit punt hier iets naast anderhalf. Dan moet je alleen nog….”
Marit: “deze.”
Ik: “Ja, en dat is gewoon…”
Marit: “Moet ik dan anderhalf nemen?”
Ik: “Die gebruik je hier wel.”
Marit: “Ja.”

Marit vult het in en kijkt vertwijfeld naar antwoorden op grafische rekenmachine.

Ik: “Nu krijg je iedere keer hetzelfde antwoord. Is dat erg verassend?”
Marit: “Nee, ik bereken iedere keer hetzelfde.”
Ik: “Ok, kun je er dan voor zorgen via een kleine aanpassing dat dit iedere keer anders wordt? Je neemt nu iedere keer anderhalf.”
Marit: “Ja.”
Ik: “Dat betekent dus dat hij hem alleen maar van dit punt hier neemt, maar hij moet de hele *x*-as eigenlijk bestrijken.”
Marit: “Ja, dus moet je *x* nemen.”
Ik: “Ja.”

In plaats van de anderhalf vult Marit nu x in op de rekenmachine. Vanaf nu probeert ze een conclusie te trekken waar het gewenste punt ligt.

Ik:	“Nu heb je Δy en wat valt je daar op?”
Marit:	“Ja, van anderhalf neemt ie af.”
Ik:	“Hoe bedoel je dat ie afneemt?”
Marit:	“Dit is toenemend stijgend en dan afnemend.”
Ik:	“Nou ja, hij is sowieso al niet stijgend.”
Marit:	“Ja, dalend bedoel ik.”
Ik:	“Ok en wat was het buigpunt dus?”
Marit:	“Dat is dan tussen anderhalf en 1,6. Moet je hem dan steeds kleiner nemen?”

Marit wil de stapjes kleiner gaan maken om zo nog beter het juiste punt te kunnen aflezen. Ik wijs haar op de symmetrie tussen de getallen en op basis van deze symmetrie trekt ze de conclusie dat het buigpunt daar moet zitten waar x anderhalf is.

Bijlage 2: Lindsey

Ook Lindsey vertel ik dat het buigpunt daar moet liggen waar de grafiek van toenemend dalend overgaat in afnemend dalend. Lindsey hoopt direct dat er een knop op de rekenmachine zit om dit te berekenen.

Lindsey: "Ehm, even denken. Ja, dan moet je toch ongeveer schatten, of niet?"
Ik: "Je kan ongeveer schatten, maar je kan het ook precies berekenen. Je kunt het zelfs op meerdere manieren berekenen, maar ik hoef er maar eentje te weten."
Lindsey: "Ehm, geen idee. Met value ofzo?"
Ik: "Volgens mij zit er op de rekenmachine geen knop om dit precies te berekenen."
Lindsey: "Oh, nou ik heb werkelijk geen idee."
Ik: "Nou, normaal gesproken als je een functie ziet, wat is dan het eerste dat je doet?"
Lindsey: "Hoe bedoel je?"
Ik: "Als je zo'n vergelijking ziet."
Lindsey: "Nou, ligt eraan wat er gevraagd wordt. Als het minimum gevraagd wordt, reken je dat uit."
Ik: "Ok, die kun je in ieder geval dus uitrekenen."
Lindsey: "Ja, met de rekenmachine."

Lindsey kan blijkbaar wel de maxima en minima bepalen met behulp van de rekenmachine. Ik probeer haar een beetje de goede kant in te duwen door haar te vragen naar de eigenschappen die de toppen hebben.

Ik: "Wat is een eigenschap van de punten hier dan?"
Lindsey: "Ehm, dat dat een top en een dal is?"
Ik: "Wat is in dat punt anders dan in bijvoorbeeld een punt hier?"
Lindsey: "Dat ligt hoger."
Ik: "Ehm, ja. Nou ik zei al. Hier gaat hij dalen en daar gaat hij stijgen. Komt er dan iets in je op. Dalen en stijgen?"
Lindsey: "Ehm, niet echt eigenlijk."

Er gaat nog geen lampje branden bij Lindsey. Daarom probeer ik haar te laten denken aan de stof die in het vorige hoofdstuk is behandeld.

Ik: "Niet echt... Denk vooral eens aan afgelopen hoofdstuk. Wat deed je daar met grafieken? Je moest vaak iets bepalen"
Lindsey: "Ja, meestal was dat een maximum ofzo. Maar dat wil niet als hij er zo middenin ligt."
Ik: "Ok, dat deed je met een knop op de rekenmachine. Maar er was ook een andere manier."
Lindsey: "Ik deed het alleen met de rekenmachine, dat was het makkelijkst."
Ik: "Ja, dat klopt. Raaklijn, zegt dat je iets?"
Lindsey: "Oh ja, ja, klopt."
Ik: "Wat is nu de helling van de raaklijn in die punten?"
Lindsey: "Staat op nul. "

Ik: “Staat op nul.”
Lindsey: “Is juist gelijk aan. Dan zit je op het hoogste punt en dan gaat hij weer dalen of stijgen. Dan is het of het een dal is of een top zeg maar.”

Lindsey weet blijkbaar heel goed wat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is in de toppen. Ik probeer haar nu te laten kijken naar het buigpunt. Welke eigenschappen zou de richtingscoëfficiënt daar hebben? Er volgt een prima opmerking.

Ik: “Ok, de helling van de raaklijn daar is in ieder geval nul. Maar dat geldt daar natuurlijk niet voor.”
Lindsey: “Nee, dan moet je kijken waar de richtingscoëfficiënt juist het laagst is. Wat het kleinste is toch, en dan dat punt.”
Ik: “Ja, nu zit je op de goede weg, maar hoe doe je dat?”
Lindsey: “Ik weet wel dat je een richtingscoëfficiënt kunt uitrekenen, maar ik weet niet op welk punt je dat… oh, dan kon je volgens mij meerdere punten nemen en dan waar het laagste is.”
Ik: “Dat kan en hoe?”
Lindsey: “Eh, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?”
Ik: “Dan kun je de helling berekenen ja”
Lindsey: “Of je kunt de gemiddelde of de snelheid ofzo, nee…”
Ik: “Dat is hetzelfde”
Lindsey: “Zal wel met *y* en *x*”
Ik: “Ja, zeker met *y* en *x*.”

Zelf is Lindsey er achter gekomen wat ze moet berekenen, alleen hoe blijft de grote vraag. Ik probeer haar weer iets op weg te helpen door haar aan de pas behandelde stof te herinneren.

Ik: “Denk even terug aan het begin van dit hoofdstuk. Wat deed je toen?”
Lindsey: “Toen nam je stukjes en die ging je steeds kleiner maken.”
Ik: “Ja, inderdaad, totdat je bijna in 1 punt uitkwam. En op die manier kreeg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Kun je dat misschien ook op de rekenmachine doen?”
Lindsey: “Ja, met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ofzo, als je de formule invoert?”
Ik: “Ja, kan. Kijk maar eens of de rekenmachine dat doet.”

Bij het invoeren van de formule kan Lindsey niet makkelijk tot een goed plaatje komen op het venster. Ik moet haar er op wijzen dat het window dat ze moet kiezen eigenlijk allang op papier is gegeven. Als ze hem goed heeft kunnen we verder.

Ik: “Ja, en waar waren we net. Je hebt nu die functie.”
Lindsey: “$\frac{dy}{dx}$”
Ik: “Kun je dat doen voor elk punt?”
Lindsey: “Nee voor *x* moet je altijd een punt invullen, maar als je niet precies weet wat het minste is, dan heeft dat volgens mij ook niet echt veel zin.”
Ik: “Nee, maar stel dat je een overzicht kunt krijgen voor wat het in al die punten is?”
Lindsey: “Ja, dan kun je het zo ongeveer aflezen.”

Het lukt Lindsey niet direct om een bruikbare manier van aanpak te bedenken. Ik moet haar weer de juiste kant op sturen.

Ik: "Kun je dat overzicht krijgen?"
Lindsey: "Ja, dan moet je zoom-fit ofzo?"
Ik: "Nee, dat gaat niet lukken,"
Lindsey: "Oh ja, dan moet je gewoon die *x* wat kleiner maken"
Ik: "Ja, maar wat heb je dan? Dan heb je de *x* en *y*- waarde. Wat wou je hebben?"
Lindsey: "De richtingscoëfficiënt"
Ik: "Ja, als je die nou eens keurig in een tabel kon krijgen."
Lindsey: "Ja, nou ik weet echt niet hoe je dat moet doen."
Ik: "Nou, je zei net al $\frac{dy}{dx}$"
Lindsey: "Kun je dat ook in de tabel doen dan?"
Ik: "Ik denk niet dat de rekenmachine dat kan, maar ken je ook nog een andere manier om dat uit te rekenen?"

Het lukt Lindsey nog niet om tot een oplossing te komen. Ik wijs haar weer op haar eerdere uitspraak, waar ze het had over stukjes die je steeds kleiner ging maken en vraag haar wat daar de *dy* en *dx* is.

Lindsey: "Ja, dat is de *y* van die min die van die, maar dat is toch een heel groot stuk?"
Ik: "Ok, klopt. Nou dan maken we hem iets kleiner. Wat wordt het dan?"
Lindsey: "Dat is die van die min die van die."
Ik: "ja, kun je hier dan een formule van maken?"
Lindsey: "Eh?"
Ik: "Dus $\frac{dy}{dx}$=?"
Lindsey: "Eh ja, dus *y* van hier min *y* van daar gedeeld door *x* van hier min *x* van daar."
Ik: "Klopt. Welke waarde heeft nu de *y* van hier dan?"
Lindsey: "Ja, dan moet je de *x* invullen in de formule."

Ik schrijf de stappen die ze dan zet even voor haar op papier in de hoop dat ze deze kan veralgemeniseren. Op papier komen de volgende formules te staan:

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$

$$\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1}$$

Het lukt Lindsey dan nog niet direct om hier een algemene formule voor te vinden. Ik schrijf hem daarom als volgt op:

$$\frac{f(1+0,5)-f(1)}{0,5}$$

Ik vraag haar nu wat die half hier eigenlijk is.

Ik: "Wat is dan die half?"
Lindsey: "De Δx."
Ik: "Goed. Schrijf dit dan eens op met Δx ipv een half."

Lindsey gaat zelf aan de slag en schrijft zo de formule goed op. Deze kan nu makkelijk door haar veralgemeniseerd worden voor alle *x*. Nu moet ze alleen deze formule nog in de rekenmachine zien te krijgen.

Ik: "Kun je dit nu door de rekenmachine laten doen?"
Lindsey: "Ik weet het echt niet. Volgens mij hebben we dat helemaal niet gehad, of wel?"
Ik: "Zoiets heb je sowieso vorig jaar een keer gehad. Je kunt de rekenmachine zeggen, ik wil een *y*-waarde hebben bij $x = 3$ ofzo, maar je kunt ook zeggen, ik wil hem van alle *x* hebben."
Lindsey: "Ja, volgens mij hebben we zoiets nooit gehad, ofzo. Ja, of ik ben het gewoon vergeten."
Ik: "Ok, komt dit je niet bekend voor?"
Lindsey: "Nee, volgens mij heb ik dit nog nooit gehad, maar dat zal wel aan mij liggen."
Ik: "Goed, hier staat eigenlijk nu gewoon wat hier ook staat. Kun je deze nu afmaken?"

Nadat ik de functie $y2=y1(x+0{,}001)$ heb opgeschreven, kan Lindsey zonder problemen de functie afmaken. Ze gaat deze vervolgens bekijken op het scherm en ziet daar een andere grafiek tevoorschijn komen. Ik vraag haar deze grafiek te interpreteren.

Ik: "Ok, nu zie je dus een nieuwe grafiek. Wat stelt deze grafiek voor?"
Lindsey: "Dit is toch wat je net uitgerekend hebt?"
Ik: "Ja, en wat was dat?"
Lindsey: "Ehm, richtingscoëfficiënt ofzo?"
Ik: "De richtingscoëfficiënt. Wat valt je nu op aan deze grafiek, als je deze ook vergelijkt met de eerste"
Lindsey: "Die is precies tegenovergesteld toch een beetje."
Ik: "Nou, dat is niet helemaal waar. Hier daalt hij bijvoorbeeld en daar ook."
Lindsey: "Ja.."
Ik: "Ok, je wist de raaklijn in de top heeft richtingscoëfficiënt?"
Lindsey: "Nul"
Ik: "Ok, wat is de richtingscoëfficiënt links van deze top?"
Lindsey: "Ehm, stijgend?"
Ik: "Links ervan is hij positief. Daalt hij, dan"
Lindsey: "is hij negatief."

Na dit inzicht te hebben verkregen, vraag ik Lindsey naar het buigpunt. Hoewel ze een correct antwoord geeft, geeft ze een onjuiste verklaring hoe ze aan dit antwoord komt.

Ik: "Nu ben ik benieuwd naar het buigpunt. Waar moet die dan liggen?"
Lindsey: "Even denken, waar hij dan het meest negatief is?"
Ik: "En waarom zou dat zijn?"
Lindsey: "Omdat hij daar het minst daalt toch?"
Ik: "Nou, hij daalt hier niet het minst."
Lindsey: "Ik ben ook niet zo goed in wiskunde."

Ik leg haar vervolgens uit dat daar waar de afgeleide functie het meest negatief is, de oorspronkelijke functie het meest daalt. Het buigpunt kan ze vervolgens makkelijk vinden met de minimum-functie op de rekenmachine.

Lindsey: “Ok, dus als ik dit dal weet, heb ik het punt.”
Ik: “Ja.”
Lindsey: “Ok, dat kan ik met minimum doen.”
Ik: “Ok, doe maar.”
Lindsey: “Dan ligt hij bij anderhalf.”

Bijlage 3: Stein

Na het uitleggen wat het buigpunt is, gaat Stein al snel zelf aan de slag op de rekenmachine. Je ziet duidelijk dat hij graag gebruik maakt van z'n rekenmachine. Na deze voortvarende start loopt hij echter direct vast.

Stein: "Ok. En nu?"
Ik: "Ja, en dan?"
Stein: "En dan komt het."
Ik: "Daar ergens moet het punt zitten, dat hij van toenemend dalend naar afnemend dalend gaat. Wat is dan de *x*-waarde van dat punt?"
Ik: "Je mag gewoon zeggen wat in je opkomt hoor."
Stein: "Ik heb echt geen flauw idee. Ik weet met die top dat ik dan een raaklijn moet tekenen en ik weet sowieso dat ik $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ moet doen. Maar, hoe ik bij dat punt moet komen, ik heb geen flauw idee."
Ik: "Ok, je hebt al gezegd, die punten weet je wel. Hoe doe je dat normaal gesproken?"
Stein: "Even kijken, calc.."
Ik: "Dat kan, maar volgens mij heb je afgelopen hoofdstuk ook een andere manier gehad."
Stein: "Ja een raaklijn tekenen."
Ik: "Een raaklijn tekenen, ja."
Stein: "Maar het is toch makkelijker als je die maxima meteen doet met die linker en rechter."
Ik: "Dat is wel makkelijker ja, maar op die manier wordt het wel heel lastig om dat punt te berekenen. Op een andere manier die je, als het goed is, ook hebt gehad kan het wel."

Stein komt nu absoluut niet verder. Ik probeer hem op weg te helpen door hem iets meer over de raaklijn te laten nadenken. Dit heeft echter weinig effect. Stein blijft hopen dat je het met een knop op de rekenmachine kunt oplossen. Uiteindelijk geef ik hem de formule $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Het zegt hem echter niks, totdat hij deze opzoekt in het boek. Ik vraag hem om dit te proberen voor deze functie. Hij probeert dit direct weer op de rekenmachine.

Stein: "Dus dan moet ik deze formule hier invullen?"
Ik: "Ja, alleen heet op de rekenmachine die *f* geen *f*, maar *y1*.
Stein: "Waar stond die *y1*?"
Ik: "Die stond onder vars en dan *y*-vars, function. En nu dit ook als functie invoeren, bij *y2*= kun je die invoeren."
Stein: "Dus daar voer ik in *y1*, en dan?"
Ik: "Dit is eigenlijk hetzelfde als wanneer je *f(x)* zou invoeren, alleen nu heet het geen *f*, maar *y1*."
Stein: "Ok, dus dan krijg je *y1* van *x* plus een klein beetje min *y1* van *x*."
Ik: "Ja, maar dan vergeet je nog een kleine stap."
Stein: "Oh ja, dan moet ik dit nog delen, dus *y3* is dan dit gedeeld door 0,01."

Nu heeft Stein de formule op de rekenmachine gekregen en vraag ik hem de gegevens te interpreteren.

Ik: "Ja, dan kun je even die *y2* uitzetten en ga je in de tabel kijken. Wat betekenen die getalletjes?"
Stein: "Dat is dan de….. richting?"
Ik: "Ja, de richting waarvan?"
Stein: "Van de raaklijn?"
Ik: "Ja, dit is inderdaad de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in al die punten."
Stein: "Maar dan moet ik dus even bij *y1* kijken wanneer die zo min mogelijk daalt, of niet?"
Ik: "Nou ja, wanneer hij zo min mogelijk daalt… je wilt het punt hebben wanneer hij omslaat he, dus wanneer hij van zo groot mogelijk dalen gaat naar minder hard dalen."
Stein: "Moet ik dan zo de hele tijd gaan zoeken?"
Ik: "Ja, dat zou kunnen."
Stein: "Maar ik moet naar *y1* kijken toch, niet naar *y3*?"

Ik wijs Stein nogmaals op wat de zojuist bij *y3* verkregen functie inhoudt. Zodat Stein de conclusie trekt dat hij toch echt naar *y3* moet kijken.

Ik: "Je ziet dus voor elke *x* heb je een waarde voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Is er dan nog iets dat in je opkomt?"
Stein: "Ja, waar die het minst stijgt dan of waar die, waar die…."
Ik: "Ok, nu zie je allemaal getalletjes, welke vrij dicht bij elkaar liggen. Kun je dat misschien nog anders zien?"
Stein: "Ehhmmm, in een grafiek?"
Ik: "Nou, probeer maar eens."
Stein: "Nou en dan raakt hij hem hier, dus daar.."
Ik: "Nou ja, hij raakt hem, hij snijdt hem."
Stein: "Ja, dat bedoel ik."
Ik: "Ok, maar wat weet je nu. Deze grafiek geeft de waardes weer van de richtingscoëfficiënten van de raaklijn van die grafiek."

Stein komt er niet uit. Ik leg hem uit dat indien de afgeleide functie positief is, de oorspronkelijke functie stijgt en indien deze negatief is, de oorspronkelijke functie stijgt.

Ik: "Nu wil ik het punt hebben waar hij maximaal daalt."
Stein: "Dat zal wel hier zijn, als hij weer gaat stijgen. Als hij negatief is en weer gaat stijgen, zal hij daar wel minder worden eh dalen."
Ik: "Ja, dat lijkt me ook."

Nu heeft Stein de juiste conclusie getrokken en kan hij het juiste punt opzoeken. Hij maakt hierbij nog wel een fout door in plaats van de minimum-functie gebruik te maken van de maximum-functie. Hier kwam hij wel zelf met de conclusie dat zijn antwoord, 2,4 niet juist zou kunnen zijn. Met behulp van de minimum-functie kwam hij vervolgens wel aan het juiste antwoord.

Bijlage 4: Robert

Ook Robert leg ik eerst uit wat de eigenschappen van het gevraagde punt zijn. Hij gaat vervolgens vrij voortvarend van start en heeft allerlei ideetjes in zijn hoofd welke hij niet helemaal precies onder woorden kan brengen.

Robert: "Nou, ik denk dat ik wel weet hoe je dat moet doen. Je moet die grafiek intoetsen op je grafische rekenmachine en vervolgens moet je die *x*-waarde heel klein maken zeg maar dus eh. Ja ik kan 't niet uitleggen zo, maar je moet de tabel erbij pakken denk ik en dan moet je iedere keer de verschillen tussen de ehhhh *x*-cooördinaat en... Ik zal het even invoeren."
Ik: "Ja is goed."

Het invoeren gaat niet helemaal goed. Robert heeft ook moeite met het kiezen van een juist window. Hij komt hier echter wel zelfstandig uit. Hij gaat vervolgens verder:

Robert: "Nou en dan neem ik aan tenminste, je weet dat het punt ongeveer op dit stuk moet liggen."
Ik: "Ja."
Robert: "Ehhm, da's ongeveer van 1 tot 2, daartussen ongeveer."
Ik: "Ja."
Robert: "En dan moet je ehhm nagaan de verschillen berekenen tussen de dinges en dan op een gegeven, eerst is het verschil telkens... Ja, zou ik moeten berekenen dan, kan ik niet zo zeggen snel."
Ik: "Ja, goed, kun je dat berekenen dan? Of kun je dat makkelijk op de rekenmachine doen misschien?"
Robert: "Ja, volgens mij moet dat wel kunnen met lijsten invoeren, maar dat weet ik zo niet uit m'n hoofd hoe dat moet.
Ehhm, even nadenken hoor."
Ik: "Ja, schrijf anders even op wat je wilt doen op de rekenmachine."

Robert schrijft verschillende Δy op voor verschillende *x*-waardes. Dit doet hij duidelijk door iedere keer het verschil te pakken in *y*-waarde tussen 2 punten.

Ik: "Dat kun je ook allemaal op de rekenmachine automatisch doen."
Robert: "Dat weet ik niet hoe dat werkt."
Ik: "Dat heb je denk ik vorig jaar gehad."
Robert: "Ja, zal best. Ik heb… met lijsten moet je dat kunnen doen."
Ik: "Nou, dat gaat niet met lijsten. Je kunt de functie invullen afhankelijk van *x* en dan deze min die functie van een vorige *x*."
Robert: "Oh, zo op deze manier zeg maar.
Deze functie?"
Ik: "Die ja."
Robert: "En dan de *x*-waarde min de...."
Ik: "Je moet dus 2 *x*-en nemen, die vlak bij elkaar liggen."
Robert: "Ja, maar die manier die ik nou doe is nog steeds niet nauwkeurig genoeg want hij ehh…."
Ik: "Nee, hij is inderdaad nog niet helemaal goed, maar het is wel een goed begin."

Robert: “Alleen zou ik de waarde nog kleiner moeten nemen, want ik heb nou één tiende gedaan, zeg maar het verschil.”
Ik: “Ja dat kun je dus direct doen als je ook die functie in de rekenmachine maakt. ’t is wel beter als die wat kleiner is.”
Robert: “Ja, maar dan ben je alleen nog langer bezig.”
Ik: “Niet noodzakelijk.”
Robert: “Maar dan moet je weer een ander foefje weten om die dingen uit te....”
Ik: “Daar moet je dan eens naar kijken of je daar achter kunt komen.”
Robert: “hmm.”

Robert komt er niet direct uit. Hij heeft geen idee dat de formule die hij op papier heeft staan makkelijk in de rekenmachine is in te vullen. Ik probeer hem hier op te wijzen door te zeggen dat je de formule $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$ bijna letterlijk kunt invullen op de rekenmachine, maar dat de *f* dan *y1* moet heten.

Robert: “Oh, op die manier. Alleen, oh, zo, op die manier. Dus dan zou je het zo moeten doen. Zo.”
Ik: “Ja.”
Robert: “Dat mag je dan doen? Dit is dan de bedoeling toch?”
Ik: “Ja.”
Robert: “en dan $x + \Delta x$. Alleen, waar staat het tekentje voor Δ?”
Ik: “Δx is gewoon een verschil dat je neemt, je kunt die Δ 1 nemen, je kunt hem 2 nemen, of je kunt hem zoals jij al zei heel klein nemen.”
Robert: “dus dan moet je gewoon een 0.001 maken bijvoorbeeld.”
Ik: “Ja, bijvoorbeeld.”
Robert: “en dan min *y1(x)*. Zo.”
Ik: “ja.”

Nadat hij de formule in de rekenmachine heeft gezet, wil hij deze als grafiek bekijken. Hij krijgt alleen niets in beeld en komt zelf tot de conclusie dat de waardes te klein zijn om in het huidige window in beeld te krijgen.

Robert: “Dan gaan we eens proberen hem in beeld te brengen. Hmmm, ik zie hem niet. Even in de tabel kijken.”
Ik: “Dat is goed.”
Robert: “Ja, die waardes zijn heel klein, die zijn natuurlijk niet zichtbaar.”
Ik: “Ja, als die heel klein zijn, zie je dat ze bijna samenvallen met de *x*-as en je ze dus niet kunt zien.”
Robert: “ Maar goed, ik heb die dinges denk ik ook niet nodig, die eeehhhh.”
Ik: “Die grafiek?”
Robert: “Nee, sorry, ik heb die grafiek niet nodig in principe, het gaat om de getallen die er in staan, niet om...”
Ik: “Ja, het gaat wel om die getallen.”
Robert: “Nu heb ik dus de getallen tussen 1 en 2 met een heel klein verschil.”
Ik: “Ja, je hebt nu het verschil in de *y* richting, de Δy zeg maar op een klein stukje horizontale verplaatsing.”

Nu trekt Robert op basis van de verkregen getallen al snel de conclusie dat het buigpunt op anderhalf zit. Hij ziet zelf dat de verkregen waardes symmetrisch zijn ten opzichte van anderhalf.

Robert: “Volgens mij zit dan op 1.5 het buigpunt.”
Ik: “En daar kom je nu op door?”
Robert: “Doordat deze 0.64 is en daar is ie 65 en hier wordt ie weer 64. Zeg maar hier is hij symmetrisch. Dat betekent dat dit dus het verschilpunt is.”