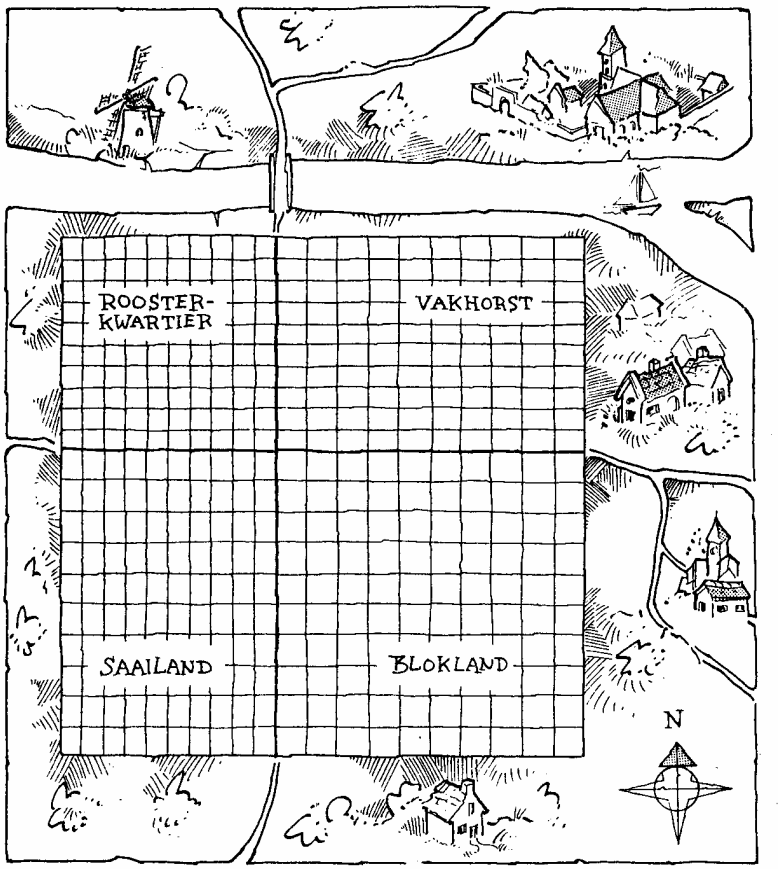
Algebra als object

Een ontwerponderzoek naar wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies met behulp van route- en oppervlaktemodellen.



Naam: Daan van Smaalen
Studentnummer: 9611053
Email: d.vansmaalen@cgu.nl

Begeleider: Nellie Verhoef

Samenvatting

In dit onderzoek draait het om het ontwikkelen van lesmateriaal dat wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen, omschrijven en vereenvoudigen van algebraïsche expressies aan de hand van route- en oppervlaktemodellen stimuleert. De hoofdvragen van het ontwerpgerichte onderzoek is:

- Draagt het ontwikkelde lesmateriaal bij aan wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies?

De mate van wiskundige begripsvorming is gemeten op een drietal niveaus: het tastbare, het symbolische en het formele niveau. Deze niveaus corresponderen met de drie werelden van de wiskunde welke door Tall zijn geformuleerd. Op basis van een vierledige pre- en posttets is de wiskundige begripsvorming van 29 brugklasleerlingen vastgesteld. De tests bevatten vragen uit alle drie de werelden van de wiskunde.

Uit analyse van de testgegevens blijkt dat het ontwikkelde lesmateriaal bijdraagt aan een verhoogd wiskundige begrip bij de leerlingen. Er is sprake van een significant verschil in de resultaten van de pre- en de posttest. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat de leerlingen alleen op het symbolische niveau aan de voorafgestelde norm voldoen. Op het formele niveau zitten de leerlingen dicht tegen de gestelde grens aan. Opmerkelijk is dat de leerlingen zowel tijdens de pre- als de posttest beter scoren op het symbolische dan op het tastbare niveau.

Voorwoord

Tijdens de uitvoering van dit onderzoek heb ik hulp gehad van zeer veel mensen. Op de eerste plaats wil ik daarvan meteen de grootste groep (N=29) bedanken, omdat zonder hen dit onderzoek er niet zou zijn. Deze groep bestaat uit alle leerlingen uit klas 1e die hebben meegedaan aan mijn onderzoek.

Verder wil ik Nellie Verhoef van de Universiteit Twente bedanken voor haar waardevolle, inspirerende en enthousiasmerende bijdrage aan het onderzoek en voor de snelle en goede feedback die ik heb gekregen.

Mark ben ik mijn dank verschuldigd voor zijn hulp bij het opzetten en uitvoeren van de analyse. Met jouw samenwerken is altijd een genot.

Tot slot bedankt ik Ines omdat ze er altijd voor me is.

Daan van Smaalen
Bunnik, juni 2006

Inhoudsopgave

Samenvatting 2
Voorwoord 3
1. Probleemformulering 5
1.1. Aanleiding 5
1.2. Doelstelling 5
1.3. Probleemstelling 6
2. Theorie en hypotheses 7
2.1. Wat is algebra? 7
2.2. Het leren van algebra 7
2.2.1. De tastbare wereld 8
2.2.2. De symbolische wereld 8
2.2.3. De formele wereld 10
2.3. De drie werelden in praktijk 10
2.4. Hypotheses 11
3. Methode 13
3.1. Typering onderzoek 13
3.2. Bronnen 13
3.3. Onderzoeksinstrument 13
3.4. Dataverzameling 14
3.5. Dataverwerking 15
3.6. Data-analyse 15
4. Resultaten 16
4.1. Wiskundige begripsvorming 16
4.2. De tastbare wereld 17
4.3. De symbolische wereld 17
4.4. De formele wereld 18
4.5. Opmerkelijkheden 19
5. Conclusies en discussie 21
5.1. Conclusies 21
5.2. Discussie 21
Literatuur 23
Bijlage - Testen 25

1. Probleemformulering

In dit hoofdstuk wordt het probleem geschetst dat aan de basis staat van dit onderzoek. Als eerst wordt de aanleiding voor het doen van dit onderzoek besproken. Vervolgens wordt ingegaan op de doelstelling van het onderzoek. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de formulering van de probleemstelling.

1.1. Aanleiding

"Eerstejaars studenten weten steeds minder, klagen docenten op de universiteiten." was de aanhef van het artikel "Maar wat is een staartdeling?" van Duursma (2005) in het NRC handelsblad van 26 oktober 2005. In het stuk valt te lezen dat er een kloof is ontstaan tussen de middelbare school en de universiteit. Het huidige wiskundeonderwijs sluit onvoldoende aan op technische, wetenschappelijke studies. De nodige kennis en vaardigheden ontbreken. Reden tot zorg dus. Maar hoe heeft het zover kunnen komen?

Volgens Van Dalen (2003) worden vwo-leerlingen op school te weinig intellectueel uitgedaagd. Vooral de meer intelligente vwo-leerlingen komen daardoor te weinig aan hun trekken. Tevens ontbreekt in het hedendaagse wiskundeonderwijs veelal de fundamentele wiskundige begripsvorming (Kaenders, 2003). Een dergelijk fundamentele aanpak wordt niet meer als wiskundig didactische opdracht gezien (antididactische omissie). Definities en theorievorming ontbreken in veel hedendaagse methodes. Illustraties en visualiseringen worden als voldoende gekarakteriseerd. De wiskunde die wordt aangeboden is over-gecontextualiseerd ("opgeleukt") waardoor de vorming van abstractie wordt bemoeilijkt (Verhoef & Broekman, 2005). Dit is onder andere veroorzaakt doordat mensen met de precieze formulering van Realistic Mathematics Education (RME) door Freudenthal en Treffers op de loop zijn gegaan om zo de demathematisering van het onderwijs te rechtvaardigen (Kaenders, 2005). Freudenthal benadrukte in navolging op Ehrenfest-Afanassjewa het belang van contexten bij het leren van wiskunde. Freudenthal gaat uit van wiskundeonderwijs dat zijn oorsprong vindt in de realiteit en in het intuïtieve denken (Verhoef, 2003). Freudenthal (1978) maakte daarbij een onderscheid tussen comprehension (een wiskundig object wordt verkend binnen verschillende contexten) en apprehension (een wiskundig object wordt verkend middels een paradigma). Maar dienden de contexten bij Freudenthal slechts als vertrekpunt, in veel hedendaagse methodes vormen ze tevens het eindpunt.

1.2. Doelstelling

Om de wiskundige cultuur in Nederland te laten voortbestaan, bestaat er behoefte aan lesmateriaal dat leerlingen intellectueel uitdaagt en wiskundige begripsvorming stimuleert. De Wageningse Methode[1] en Ratio[2] hebben, in tegenstelling tot veel hedendaagse methodes, wiskundige begripsvorming en intellectuele uitdaging ("uitblinken mag weer") hoog in het vaandel staan. De schrijvers van beide methodes hebben zich laten inspireren door de ideeën en theorieën van Freudenthal en zijn medewerkers. Daar de materialen van Ratio in samenwerking met (een aantal schrijvers van) de Wageningse Methode zijn ontwikkeld, sluiten de materialen zowel qua inhoud als qua uitgangspunten goed op elkaar aan.

[1] www.wageningse-methode.nl
[2] www.ratio.ru.nl

In dit onderzoek richt ik me op het algebrahoofdstuk “Roosterdam” van de Wageningse Methode. In dit hoofdstuk leren brugklasleerlingen algebraïsche expressies opstellen aan de hand van oppervlakte- en routemodellen en deze expressies om te schrijven en zo te vereenvoudigen. Het bestaande materiaal is kritisch bekeken en waar nodig op basis van het theoretische kader aangepast met als resultaat een algebrahoofdstuk dat voldoet aan de volgende uitgangspunten:

- het materiaal stimuleert de wiskundige begripsvorming van de leerlingen;
- het materiaal daagt leerlingen intellectueel uit;
- het materiaal houdt rekening met verschillen tussen leerlingen;
- ICT kan worden gebruikt waar dit een meerwaarde biedt.

1.3. Probleemstelling

In dit onderzoek draait het om het ontwikkelen van lesmateriaal dat wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen, omschrijven en vereenvoudigen van algebraïsche expressies aan de hand van route- en oppervlaktemodellen stimuleert. Het onderzoek start met een verkenning van de theorie omtrent het leren van algebra met als resultaat een beschrijving van de kenmerken van wiskundige begripsvorming met betrekking tot algebraonderwijs.

Op basis van de bevindingen uit het vooronderzoek (het theoretische kader) en met als startpunt het reeds bestaande materiaal van de Wageningse Methode en Ratio is een algebrahoofdstuk ontwikkeld, dat leerlingen leert algebraïsche expressies op te stellen en om te schrijven. De hoofdvragen van dit onderzoek is:

- Draagt het ontwikkelde lesmateriaal bij aan wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies?

2. Theorie en hypotheses

> There is a stage in the curriculum when the introduction of algebra may make things hard, but not teaching algebra will soon render it impossible to make hard things simple.
>
> Tall & Thomas (1991)

In dit hoofdstuk worden de ideeën met betrekking tot het leren van algebra behandeld. Allereerst wordt ingegaan op het woord algebra en haar betekenis. Wanneer is gedefinieerd wat onder algebra wordt verstaan, wordt ingegaan op de fasen die bij het leren van algebra worden doorlopen. Het resultaat is een beschrijving van de verschillende abstractieniveaus (de zogenaamde drie werelden van de wiskunde) die bij het leren van algebra kunnen worden onderscheiden. Vervolgens wordt beschreven op welke wijze deze drie werelden een rol spelen in dit onderzoek dat zich richt op het opstellen en herschrijven van algebraïsche uitdrukkingen. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de formulering van de hypotheses.

2.1. Wat is algebra?

Het woord algebra (Simon Stevin gebruikte het woord stelkunde) is een verbastering van het Arabische woord "al-jabr" uit de titel van het boek "Hisab al-jabr w'al-muqabala" van Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. Al-Khwarizmi leefde in Bagdad, ongeveer van 780 tot 850. "Al-jabr" is oorspronkelijk een naam voor de techniek bij het werken met verschillen. Algebra is in de loop der tijd tot wel wat meer uitgegroeid. Nu wordt onder algebra verstaan: het onderzoeken van getalsystemen en hun operaties, waar heel geavanceerde vormen van bestaan (Drijvers, Goddijn & Kindt, 2006). Deze definitie van algebra wijkt enigszins af van wat tegenwoordig op de middelbare school onder algebra wordt verstaan. Onder de schoolalgebra vallen onderwerpen als: omgaan met variabelen, de drie-eenheid formules-tabellen-grafieken, vergelijkingen oplossen, enzovoorts. De schoolalgebra wordt veelal gezien als een manier van werken, waarbij letterformules een belangrijke plaats innemen. De nadruk ligt in de schoolsituatie op het doen en minder op het denken over. Toch is dit laatste van groot belang bij het opbouwen van een abstracte "algebrawereld" die flexibel inzetbaar is bij het denken over en het oplossen van een breed scala aan problemen. De algebra op de middelbare school moet dan ook ruimer worden gezien.

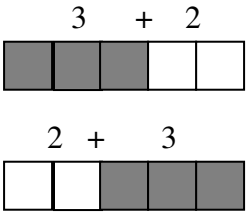
2.2. Het leren van algebra

Sinds Piaget zijn theorie met betrekking tot de cognitieve ontwikkeling van kinderen heeft bekendgemaakt, zijn vele wetenschappers bezig met het doorontwikkelen en verfijnen van zijn theorieën. Een recente ontwikkeling in de wiskundige hoek is de van Tall (2004a) afkomstige theorie van de drie werelden van de wiskunde. Volgens Tall et. al. (2001) kan de ontwikkeling van een kind met betrekking tot wiskundige activiteiten in een drietal fasen worden opgedeeld, te weten: perceptie, actie en reflectie. Onder perceptie wordt het waarnemen van wiskundige objecten en haar eigenschappen verstaan. Met actie bedoelt Tall het manipuleren van de wiskundige objecten. Door te reflecteren op zowel de waarnemingen als de uitgevoerde acties ontstaat een beeld van de (relatie tussen) eigenschappen van een wiskundige object en de relatie tussen wiskundige objecten onderling. Deze fasen corresponderen met een drietal werelden, welke Tall in volgorde van minst tot meest abstract *embodied*, *symbolic* en *formal* noemt. In dit onderzoek zijn de begrippen tastbare, symbolische en formele wereld gebruikt voor de drie werelden van Tall. Een nieuw wiskundig object wordt dus in de tastbare wereld geïntroduceerd. In de loop der tijd vindt door reflectie, waarbij de docent een belangrijke rol speelt, de transitie

naar de symbolische en tot slot naar de formele wereld plaats. Binnen de werelden van de wiskunde maakt Tall een onderscheid tussen het leren van de wiskunde die betrekking heeft op ruimten en vormen (denk hier aan de meetkunde) en de symbolische wiskunde (zoals rekenkunde, algebra en calculus). Voor het onderwijzen van ruimten en vormen valt Tall terug op de theorie van het Nederlandse echtpaar Van Hiele[3]. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de door Tall ontwikkelde ideeën met betrekking tot de symbolische wiskunde en in het bijzonder de algebra.

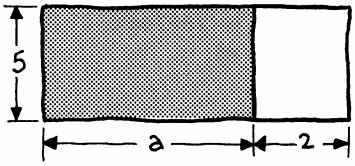
2.2.1. De tastbare wereld

Onder de tastbare wereld verstaat Tall de wereld van wiskundige objecten die waargenomen kunnen worden. Het is de wereld waarin het leren begint. Om aan te tonen dat iets klopt, kan in deze wereld worden vertrouwd op de zintuigen. Zo kan worden aangetoond dat de gelijkheid $3+2=2+3$ geldt door drie grijze en twee witte blokjes achter elkaar te plaatsen (zie figuur 2.1) (Tall, 2002). Wanneer de rijen worden omgedraaid, is te *zien* dat deze even lang zijn. Dit is een paradigma van het soort bewijzen dat behoort tot de tastbare wereld.



Figuur 2.1 - Een aanschouwelijk bewijs dat 3+2=2+3

Op een soortgelijke wijze is het mogelijk om algebra aanschouwelijk te maken. Zo kan een oppervlaktemodel worden gebruikt bij het onderwijzen van de distributiewetten. De identiteit $5\cdot(a+2)=5\cdot a+10$ kan aanschouwelijk worden gemaakt door de oppervlakte van een stuk land, dat in een grijs en een wit deel is verdeeld, op twee manieren te berekenen (zie figuur 2.2)[4]. Leerlingen *zien* dat de identiteit klopt. Het stuk land als metafoor voor de distributiewet is goed bruikbaar in de beginfase van het leren van algebra. De metafoor vormt een brug tussen de wereld waarin alles waargenomen kan worden en de abstracte wereld van de algebra. Het nadeel van de metafoor is dat deze alleen voor specifieke gevallen bruikbaar is. Zo mag de variabele a geen negatief getal zijn. De metafoor moet nu worden losgelaten en de leerling komt zo in de symbolische wereld van Tall terecht.



1e manier: lengte × breedte	
lengte rechthoek	5
totale breedte	$a+2$ ×
oppervlakte rechthoek	$5\cdot(a+2)$

2e manier: grijze deel + witte deel	
oppervlakte grijze deel	$5\cdot a$
oppervlakte witte deel	10 +
oppervlakte rechthoek	$5\cdot a+10$

Figuur 2.2 - De distributiewetten aanschouwelijk gemaakt met behulp van een oppervlaktemodel

2.2.2. De symbolische wereld

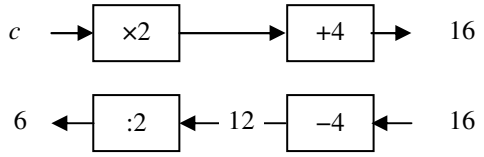
In de symbolische wereld van Tall staan de acties op wiskundige objecten centraal. Door te reflecteren op de acties die op wiskundige objecten zijn uitgevoerd, worden uitspraken gedaan over de objecten. Zo kan in de symbolische wereld worden aangetoond dat de gelijkheid $3+2=2+3$ geldt door beide sommen te berekenen en te concluderen dat de uitkomsten hetzelfde zijn (Tall, 2002). In de symbolische wereld kan de geldigheid van de identiteit

[3] Meer informatie over de theorie van Van Hiele is te vinden in "Structure and Insight" van P. van Hiele (1986).
[4] Dit voorbeeld is afkomstig uit boekje 3 – Formules van de Wageningse Methode.

$5 \cdot (a+2) = 5 \cdot a + 10$ worden nagegaan door voor a een willekeurig getal in te vullen en te onderzoeken of dit aan beide kanten van het gelijkheidsteken dezelfde uitkomst oplevert. Aangezien het stuk land als metafoor voor de distributiewetten is losgelaten, kan de geldigheid van een identiteit ook worden aangetoond wanneer deze negatieve getallen bevat, zoals $-5 \cdot (a+2) = -5 \cdot a - 10$.

Zoals de naam al doet vermoeden, is de symbolische wereld de wereld van de symbolen. De symbolen die binnen de algebra worden gebruikt, kunnen zowel staan voor een proces dat plaatsvindt (zoals optellen, differentiëren en integreren) als voor een concept waarover nagedacht kan worden (zoals de som, de afgeleide en de integraal). Tall en Gray (1994) duiden dit verschijnsel aan met het begrip procept, een samenvoeging van de woorden proces en concept. Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) maken eenzelfde onderscheid en stellen dat formules en expressies zowel het karakter van een procesbeschrijvingen kunnen hebben als een op zichzelf staan wiskundig object kunnen zijn. Zo staat de expressie $4+2c$ zowel voor de beschrijving van een proces (de som van vier en twee keer de waarde van c) als voor een wiskundig object (de expressie $4+2c$ kan als geheel worden gemanipuleerd bijvoorbeeld door het op te tellen bij een andere expressie zoals $4+2c+3c = 4+7c$ of door het te ontbinden in factoren als in $4+2c = 2(2+c)$) (Tall, 2004b).

Volgens Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) worden algebraïsche uitdrukkingen in ons onderwijs, naar analogie van het rekenen met getallen, als procesbeschrijvingen opgevoerd daar het opereren op objectniveau een hogere drempel kent dan de proceskant. Een voorbeeld vormt het verband tussen de reparatiekosten (K) en de reparatietijd (t): $K = 45t + 30$. Deze formule geeft vanuit de optiek van de procesbeschrijving aan hoe je de kosten kunt bereken als de reparatietijd bekend is. In dit voorbeeld biedt de context nog houvast aan de leerlingen. Wanneer de context verdwijnt is het voor leerlingen moeilijk om betekenis te geven aan algebraïsche expressies. Een expressie als $4+2c$ beschrijft immers een potentieel proces dat alleen kan worden uitgevoerd wanneer de waarde van c bekend is in tegenstelling tot de rekenkunde waar $4+2$ zonder moeite kan worden bepaald. Het +-teken heeft in de ogen van veel leerlingen een actiekarakter en lijkt aan tot sporen tot het maken van een berekening met als gevolg fouten als $4+2c = 6c$ (Tall, 2004b). Volgens Tall (2004b) kunnen leerlingen vergelijkingen als $4+2c = 16$ oplossen, wanneer ze expressies opvatten als een potentieel proces: "start met c, vermenigvuldig met 2, tel er 4 bij op en het antwoord is 16". Door het opstellen van een pijlenketting en het uitvoeren van de inversebewerkingen van de operaties vinden leerlingen de gevraagde waarde van c (zie figuur 2.3). Deze methode voor het oplossen van vergelijkingen gaat niet meer op wanneer er expressies staan aan beide kanten van het gelijkheidsteken, zoals in $6x+3 = 24-x$. Om deze vergelijking op te lossen, moet de leerling de beide expressies niet als proces zien maar als object, een bepaald getal dat op twee verschillende manieren is uitgedrukt (Tall, 2004b).



Figuur 2.3 - Een vergelijking als procesbeschrijving

De vergelijkingen $4+x=7$ en $x+4=7$ zijn algebraïsch gezien hetzelfde, maar voor jonge kinderen verschillend (Tall, 2004b). De eerste vergelijking lossen kinderen eenvoudig op door vanaf het getal 4 door te tellen tot het getal 7. In het tweede geval weet de leerling niet bij welk

getal begonnen moet worden met als resultaat dat het antwoord wordt gevonden door een "gok en test" aanpak waarin verschillende beginwaarden worden uitgeprobeerd. Leerlingen zien de expressie als een proces en niet als object. Met dit beeld van uitdrukkingen kom je niet ver in de algebra. Er valt immers vaak niets uit te rekenen. Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) geven hier een mooi voorbeeld van.

> *Een formule als* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *heeft geen proceskarakter; er wordt aangegeven dat de uitdrukking links van het gelijkheidsteken gelijkwaardig is aan de uitkomst aan de andere kant. Het gelijkheidsteken staat dus niet voor 'en dat geeft dan als uitkomst …' maar voor 'is equivalent met'. Ook de plus heeft een ander karakter: in plaats van 'pak a en tel er b bij op' staat de + in* $(a+b)^2$ *voor 'de som van a en b'. De expressie* $(a+b)^2$ *is geen procesbeschrijving maar een algebraïsch object.*

Het is van belang dat leerlingen een algebraïsche expressie zowel als een proces als een object kunnen beschouwen. Een leerling moet gevoel krijgen voor welke blik op welk moment het meest geschikt is en flexibel kunnen wisselen tussen het proces- en objectdenken (Drijvers, Goddijn & Kindt, 2006). Dit stelt een leerling in staat om verstandige keuzes te maken en het overzicht te behouden. In de literatuur wordt dit wel symbol sense genoemd (Drijvers, Goddijn & Kindt, 2006). Het is van belang dat naast de algebraïsche vaardigheden (zoals het vereenvoudigen van expressies en het oplossen van eenvoudige vergelijkingen) ook aandacht wordt besteed aan deze metavaardigheden. Er moet een balans zijn tussen doen en denken.

2.2.3. De formele wereld

De meest abstracte wereld wordt in de theorie van Tall de formele wereld genoemd. Dit is de wereld van de axioma's, de definities en de formele bewijzen. In deze wereld is $3+2=2+3$ omdat de commutatieve wet van het optellen geldt die zegt dat $x+y=y+x$. Het bewijs dat de vergelijking klopt is gebaseerd op een axioma (Tall, 2002). Evenzo geldt in de formele wereld de identiteit $-5\cdot(a+2)=-5\cdot a-10$ omdat deze is gebaseerd op het axioma $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$. De formele wereld van Tall komt tegenwoordig in geringe mate aan bod in het middelbaar onderwijs. Het streven is er wel, hetgeen blijkt uit de keuze voor de Euclidische meetkunde bij wiskunde B12. Op de universiteit wordt daadwerkelijk veel gebruik gemaakt van deze formele werkwijze.

2.3. De drie werelden in praktijk

Uit de beschreven theorie van Tall blijkt dat het leren van algebra een proces is waarbij verschillende stadia worden doorlopen. Het leerproces begint in de tastbare wereld waar wiskundige objecten kunnen worden waargenomen. Paradigma's en metaforen vormen een referentiekader waarop een leerling in een later stadium terug kan vallen. Er wordt zo veel mogelijk gewerkt met denkvoorbeelden (zoals bijvoorbeeld de welbekende heks met haar koude en warme blokjes) en zo weinig mogelijk met werkvoorbeelden (zoals het geven van een aantal uitgewerkte voorbeelden als $4-7=4+-7=-3$) (Lagerwerf, 2000). In dit stadium is het taalgebruik veelal informeel en worden door leerlingen intuïtieve strategieën gehanteerd. De tastbare wereld sluit aan bij de uitgangspunten van het Realistic Mathematics Education (RME) daar wiskundige begrippen in een context verkend worden. Op deze wijze ontstaat een contextgebonden gebonden begrip (Van der Kooij, 2002). In dit onderzoek, dat zich richt op het opstellen en omschrijven van algebraïsche uitdrukkingen, zijn route- en oppervlaktemodellen

gebruikt om het abstracte begrip algebraïsche expressie een body te geven. Leerlingen verkennen de beginselen van de algebra in de wijken van de denkbeeldige stad Roosterdam. Roosterdam vormt het paradigma van waaruit het leerproces start. Freudenthal (1978) noemde dit apprehension.

De tastbare wereld heeft haar tekortkomingen (de wiskundige objecten dienen aan specifieke, door de context opgelegde eigenschappen te voldoen) en langzaam moet deze wereld dan ook verlaten worden. Getracht wordt om het contextgebonden begrip te decontextualiseren (Van der Kooij, 2002) en het taalgebruik te formaliseren. De leerling betreedt nu de symbolische wereld. In deze wereld vormen de algebraïsche expressies zowel een proces als een concept. Het proceskarakter van de uitdrukkingen sluit aan bij eerdere ervaringen van leerlingen in de rekenkunde. Om te slagen binnen de algebra, is het van groot belang dat leerlingen de algebraïsche uitdrukkingen ook gaan beschouwen als op zichzelf staande wiskundige objecten. Een succesvolle leerling kan flexibel wisselen tussen het proces- en het objectdenken. In het ontwikkelde lesmateriaal is aandacht besteed aan zowel de proces- als de objectkant van de algebra.

Wanneer een leerlingen in staat is om algebraïsche expressies als 4a + 2b + 3a + 5b te vereenvoudigen zonder gebruik te maken van de metafoor Roosterdam, dan bevindt de leerling zich in de symbolische wereld. De expressie 4a + 2b + 3a + 5b sluit echter nog wel aan bij de context die in de tastbare wereld is gebruikt. Wanneer een leerling een algebraïsche uitdrukking als 5a − 3b − 7a + b kan vereenvoudigen dan heeft de leerling de context, waarbinnen de expressies zijn geïntroduceerd, losgelaten. Er heeft transfer plaatsgevonden (Van der Kooij, 2002). De leerling kan het geleerde toepassen op nieuwe problemen. De leerling betreedt nu de formele wereld. In het ontwikkelde lesmateriaal worden uitstapjes gemaakt naar de formele wereld. Zo kunnen leerlingen door gebruik te maken van axioma's bepaalde bewijzen leveren. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het bewijs dat $2a \cdot 3a = 6a^2$ door gebruik te maken van de commutatieve wet of het bewijs dat $3 \cdot (2a + 4b) = 6a + 12b$ door gebruik te maken van de distributiewet.

2.4. Hypotheses

Op basis van de geschetste theorie is lesmateriaal geschreven waarbij het bestaande materiaal van de Wageningse Methode en Ratio als uitgangspunt is genomen. Om te bepalen of het ontwikkelde lesmateriaal bijdraagt aan wiskundige begripsvorming zijn een aantal hypotheses geformuleerd, waarvan de uitkomsten de hoofdvraag van het onderzoek beantwoorden.

Hypothese 1:
Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip bij de leerlingen (vergelijking van de pretest met de posttest)!

Hypothese 1.1:

a) Omdat leerlingen tijdens de pretest al in de tastbare wereld zitten, zorgt het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal niet voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de tastbare wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!
b) Van de vragen in de tastbare wereld wordt 80% goed beantwoord tijdens de pretest!

Hypothese 1.2:

a) Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de symbolische wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!
b) Van de vragen in de symbolische wereld wordt 80% goed beantwoord tijdens de posttest!

Hypothese 1.3:

a) Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de formele wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!
b) Van de vragen in de formele wereld wordt 50% goed beantwoord tijdens de posttest!

3. Methode

In dit hoofdstuk wordt de methode beschreven die is gebruikt bij het uitvoeren van dit onderzoek. De eerste paragraaf behandelt de methodische karakterisering van het onderzoek. Vervolgens wordt in de tweede paragraaf de populatie, waarop het onderzoek betrekking heeft, beschreven en de steekproef uit deze populatie. In paragraaf drie wordt ingegaan op het gebruikte lesmateriaal en wordt het onderzoeksinstrument beschreven waarmee de mate van wiskundige begripsvorming is onderzocht. In paragraaf vier worden de bijzonderheden wat betreft het verzamelen van de data behandeld. Vervolgens wordt in paragraaf vijf ingegaan op de wijze waarop de data is verwerkt. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een behandeling van de statistische analyseprocedures die gebruikt zijn.

3.1. Typering onderzoek

Het onderzoek speelt zich af in de praktijk van het wiskundeonderwijs in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Vanwege de complexiteit en dynamiek van deze context is gekozen voor een ontwerpgerichte onderzoeksaanpak (Van der Akker, 1999). Op theorie gefundeerde grondgedachten zijn omgezet in een product (in dit geval lesmateriaal) dat in de praktijk is getoetst. Uitgangspunt voor het ontwikkelde materiaal vormden het boekje Roosterdam van de Wageningse Methode en het hoofdstuk Algebra van Ratio. Op basis van de bevindingen van het vooronderzoek (het theoretische kader) is het materiaal van de Wageningse Methode en Ratio kritisch bekeken en waar nodig aangepast met als resultaat een algebrahoofdstuk over het opstellen en omschrijven van algebraïsche expressies. Bij het ontwikkelen van het lesmateriaal is gebruik gemaakt van de expertise binnen het schrijversteam van de Wageningse Methode en de begeleider van de UT. Het ontwikkelde materiaal is, voordat het in de lespraktijk is getest, beoordeeld door het schrijversteam van de Wageningse Methode en de begeleider van de UT. Aan de hand van hun op- en aanmerkingen is het product bijgesteld.

Middels dit onderzoek is getoetst of het ontwikkeld materiaal (de onafhankelijke variabele) bijdraagt aan wiskundige begripsvorming (de afhankelijke variabele). Het onderzoek kan worden getypeerd als pre-experimenteel onderzoek (Baarda & De Goede, 1997). Voor de verschillende onderwerpen uit het lesmateriaal is op een tweetal momenten de mate van wiskundige begripsvorming bepaald. Aangezien de onderwerpen kleine hoeveelheden stof beslaan en daardoor de werelden van Tall vlot achter elkaar worden doorlopen, zijn er per onderdeel slechts twee meetpunten mogelijk.

3.2. Bronnen

Het onderzoek heeft betrekking op leerlingen uit klas 1 van het Voortgezet Wetenschappelijk Onderwijs (VWO). Aan het onderzoek deed één eerste klas van het Christelijk Gymnasium te Utrecht mee. De klas bestaat uit 29 leerlingen. Zij zijn de proefpersonen en vormen de steekproef uit de populatie van brugklasleerlingen.

3.3. Onderzoeksinstrument

Het doel van het onderzoek is het ontwikkelen van lesmateriaal met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies dat wiskundige begripsvorming stimuleert. Het lesmateriaal dient tegemoet te komen aan verschillen tussen leerlingen en moet alle leerlingen intellectueel uitdagen. Om dit te bereiken zijn in het lesmateriaal routes geïntroduceerd. De

leerling kan bij het verwerken van de lesstof kiezen uit een tweetal routes (grijs of zwart). In de grijze route wordt de mogelijkheid geboden om extra te oefenen met de nieuw geleerde stof (inoefenen en herhalen). De zwarte route is voor de leerlingen die op zoek zijn naar extra uitdaging (verrijken en verdiepen). De leerlingen mochten zelf bepalen welke route ze bewandelden.

Voor het vaststellen van de wiskundige begripsvorming is gebruik gemaakt van verschillende testen die tijdens de lessen zijn afgenomen. Per paragraaf is de mate van begripsvorming op een tweetal momenten gemeten (pre- en posttest). Het eerste testmoment (pretest) vond plaats vlak voordat in de stof de overgang van de tastbare wereld naar de symbolische wereld wordt gestimuleerd. Het betreft een bewuste keuze om de eerste test af te nemen als de leerlingen al even met het betreffende onderwerp bezig zijn. Immers wanneer zo'n eerste test zou worden afgenomen voordat een leerling überhaupt iets van het onderwerp heeft gezien, zou dit resulteren in gokken en kan niet worden vastgesteld of er daadwerkelijk een groei plaatsvindt via de werelden van de wiskunde. Het tweede testmoment (posttest) vond plaats nadat het betreffende onderwerp was afgesloten (in dit geval het einde van een paragraaf) en het lesmateriaal de leerlingen gestimuleerd heeft om de symbolische of zelfs de formele wereld te betreden.

In alle afgenomen testen komen de drie werelden van de wiskunde van Tall terug. Een test begint met één of meer vragen op het tastbare niveau. In deze vragen is gebruik gemaakt van route- en oppervlaktemodellen. Vervolgens is er een gelijk aantal vragen op het symbolische niveau. De leerlingen worden uitgedaagd om deze vragen te beantwoorden zonder gebruik te maken van route- en oppervlaktemodellen. De wiskundige context van deze vragen (de positieve gehele getallen) laat wel de mogelijk open voor de leerlingen om terug te vallen op de route- en oppervlaktemodellen. De laatste vragen van een test corresponderen met het formele niveau. In deze vragen spelen de negatieve en rationale getallen een hoofdrol zodat de leerlingen de route- en oppervlaktemodellen slechts als referentiekader kunnen gebruiken bij het beantwoorden van de vragen. Aangezien de leerlingen niet hebben kunnen oefenen met dit soort opgaven, kan worden bepaald of zij het geleerde ook in een andere context kunnen toepassen (transfer genaamd). De afgenomen testen zijn opgenomen in bijlage A.

Door bij het eerste testmoment aan 50% van de leerlingen versie A en aan de andere 50% van de leerlingen versie B voor te leggen en dit bij het tweede testmoment om te keren, is voorkomen dat de verschillen in de test effect hebben op het resultaat.

Om het onderzoek eerlijk te laten verlopen, moest worden voorkomen dat leerlingen vooruit werken. Door alleen het lesmateriaal uit te delen dat voor de volgende test doorgewerkt moest worden, is dit voorkomen.

3.4. Dataverzameling

Tijdens de uitvoering van het onderzoek heeft een aantal proefpersonen lessen gemist. De betreffende leerling kreeg in dat geval de eerst volgende les een pakket mee met daarin naast het lesmateriaal ook de gemiste test(en). In het lesmateriaal was aangegeven wanneer de leerling een gemiste test diende te maken. In deze gevallen was er dus geen toezicht op de wijze waarop de test werd gemaakt.

3.5. Dataverwerking

Voor alle leerlingen is voor elke vraag uit de afgenomen testen bijgehouden of de leerling de vraag goed of fout heeft beantwoord. Op basis van deze gegevens zijn per leerling de totaalscores voor de tastbare, symbolische en formele wereld bepaald en tevens de eindscores berekend voor zowel de pre- als de posttesten. Verder is voor elke leerling bijgehouden welke route (grijs om extra te oefenen of zwart voor de uitdaging) deze in het lesmateriaal heeft gevolgd.

3.6. Data-analyse

De hoofdvraag van dit onderzoek is of het ontwikkelde lesmateriaal bijdraagt aan wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies. Deze hoofdvraag is geoperationaliseerd middels de in hoofdstuk 2 geformuleerde hypotheses.

Door de gecumuleerde resultaten van de pre- en de posttesten (onder andere uitgesplitst naar de wereld van de wiskunde waarop ze betrekking hebben) met elkaar te vergelijken, kan antwoord worden gegeven op de hypotheses 1, 1.1.a, 1.2.a en 1.3.a. Er is in dit geval sprake van een within-subject tijd aangezien voor elke proefpersoon twee metingen per paragraaf worden verricht. Met behulp van een gepaarde toets is de variabele wiskundige begripsvorming op twee verschillende tijdstippen vergeleken. Vanwege het continue karakter van de gegevens kan er gebruik worden gemaakt van een parametrische techniek. In dit onderzoek is de 1-factor repeated measures ANOVA toegepast. De nul-hypothese, die bij deze toets hoort, zegt dat er geen verschil is tussen de beide verdelingen, dus dat de gepaarde steekproeven afkomstig zijn uit dezelfde populatie.

Door het gemiddelde van de totaalscore met betrekking tot een wereld van de wiskunde te vergelijken met de maximaal mogelijke score, kan antwoord worden gegeven op de hypotheses 1.1.b, 1.2.b en 1.3.b.

4. Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten van het onderzoek besproken. Er wordt gestart met een bespreking van de resultaten die betrekking hebben op de in hoofdstuk 2 geformuleerde hypotheses. Aan het einde van het hoofdstuk worden opmerkelijkheden besproken die tijdens de analyse naar boven zijn gekomen.

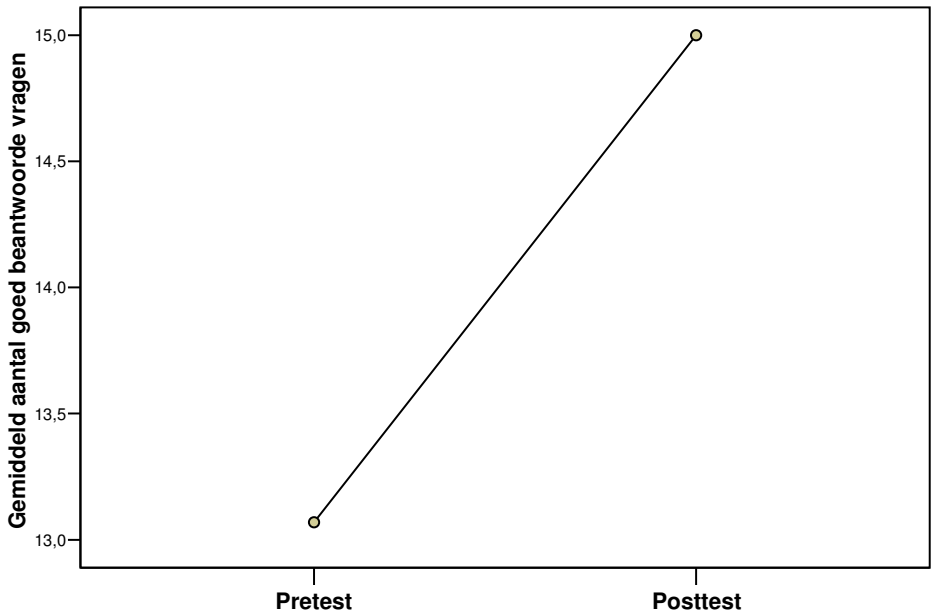
4.1. Wiskundige begripsvorming

Hypothese 1:
Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip bij de leerlingen (vergelijking van de pretest met de posttest)!

Om hypothese 1 te toetsen, wordt op de totaalscores (het totaal aantal goed beantwoorde vragen) van de pretest en de posttest een 1-factor repeated measures ANOVA uitgevoerd met als indeling van de meting:

Tijd	Score
Pretest	De som van het aantal, in de pretesten, goed beantwoorde vragen
Posttest	De som van het aantal, in de posttesten, goed beantwoorde vragen

Uit de analyse blijkt dat er een significant verschil is tussen het resultaat van de pretest en de posttest ($F(1.28)=21.65$, $p=.000$, $R^2=.436$), zie figuur 4.1. Dit effect is van de voorspelde richting want de leerlingen (N=29) hebben de posttest (15.00) beter gemaakt dan de prettest (13.07). De hypothese dat het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip wordt hiermee dus bevestigd.



Figuur 4.1 – Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen uitgezet tegen de tijd

4.2. De tastbare wereld

Hypothese 1.1.a:
Omdat leerlingen tijdens de pretest al in de tastbare wereld zitten, zorgt het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal niet voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de tastbare wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!

Om hypothese 1.1.a te toetsen, wordt op de totaalscores (het totaal aantal goed beantwoorde vragen met betrekking tot de tastbare wereld) van de pretest en de posttest een 1-factor repeated measures ANOVA uitgevoerd met als indeling van de meting:

Tijd	Score
Pretest	De som van het aantal, in de pretesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de tastbare wereld
Posttest	De som van het aantal, in de posttesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de tastbare wereld

Uit de analyse blijkt dat er geen significant verschil is tussen het resultaat van de pretest en de posttest ($F(1.28)=1.51$, $p=.229$). Dit effect is van de voorspelde richting want de leerlingen ($N=29$) hebben de posttest (5.45) niet significant beter gemaakt dan de prettest (5.21). Hieruit blijkt dat het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal niet bijdraagt aan een niveauverhoging met betrekking tot de tastbare wereld.

Hypothese 1.1.b:
Van de vragen in de tastbare wereld wordt 80% goed beantwoord tijdens de pretest!

Uit de bovenstaande gegevens blijkt dat (5.21/7) 74% van de vragen uit de tastbare wereld tijdens de pretest goed wordt beantwoord. De hypothese (1.1.b) dat de leerlingen tijdens de prestest 80% van de vragen uit de tastbare wereld goed beantwoorden is dus niet juist.

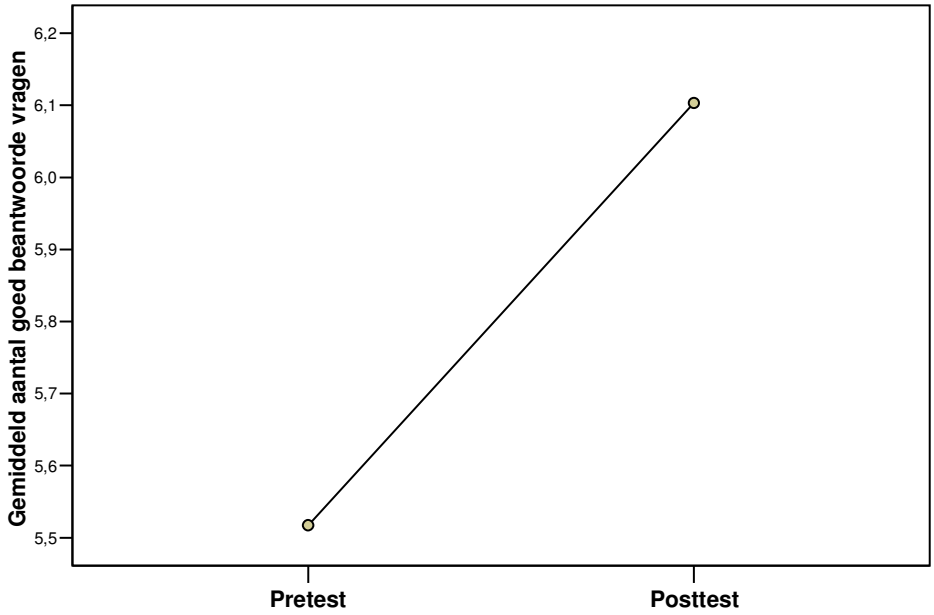
4.3. De symbolische wereld

Hypothese 1.2.a:
Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de symbolische wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!

Om hypothese 1.2.a te toetsen, wordt op de totaalscores (het totaal aantal goed beantwoorde vragen met betrekking tot de symbolische wereld) van de pretest en de posttest een 1-factor repeated measures ANOVA uitgevoerd met als indeling van de meting:

Tijd	Score
Pretest	De som van het aantal, in de pretesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de symbolische wereld
Posttest	De som van het aantal, in de posttesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de symbolische wereld

Uit de analyse blijkt dat er een significant verschil is tussen het resultaat van de pretest en de posttest (F(1.28)=11.15, p=.002, R^2=.285), zie figuur 4.2. Dit effect is van de voorspelde richting want de leerlingen (N=29) hebben de posttest (6.10) beter gemaakt dan de prettest (5.52). De hypothese dat het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de symbolische wereld wordt hiermee dus bevestigd.



Figuur 4.2 – Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen op symbolische niveau uitgezet tegen de tijd

Hypothese 1.2.b:
Van de vragen in de symbolische wereld wordt 80% goed beantwoord tijdens de posttest!

Uit de bovenstaande gegevens blijkt dat (6.10/7) 87% van de vragen uit de symbolische wereld tijdens de posttest goed wordt beantwoord. De hypothese (1.2.b) dat de leerlingen tijdens de poststest 80% van de vragen uit de symbolische wereld goed beantwoorden is dus juist.

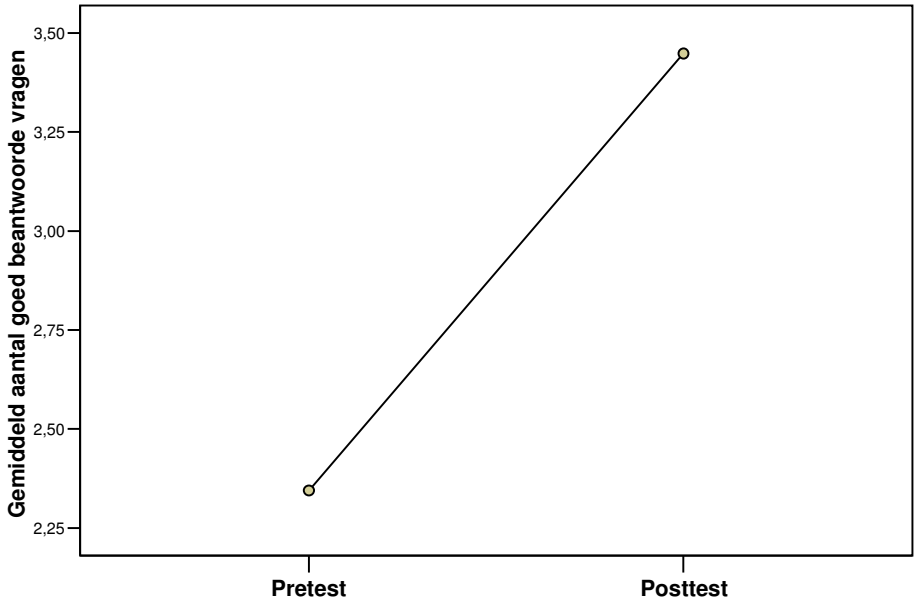
4.4. De formele wereld

Hypothese 1.3.a:
Het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de formele wereld (vergelijking van de pretest met de posttest)!

Om hypothese 1.3.a te toetsen, wordt op de totaalscores (het totaal aantal goed beantwoorde vragen met betrekking tot de formele wereld) van de pretest en de posttest een 1-factor repeated measures ANOVA uitgevoerd met als indeling van de meting:

Tijd	Score
Pretest	De som van het aantal, in de pretesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de formele wereld
Posttest	De som van het aantal, in de posttesten, goed beantwoorde vragen met betrekking tot de formele wereld

Uit de analyse blijkt dat er een significant verschil is tussen het resultaat van de pretest en de posttest (F(1.28)=19.51, p=.000, R^2=.411), zie figuur 4.3. Dit effect is van de voorspelde richting want de leerlingen (N=29) hebben de posttest (3.45) beter gemaakt dan de prettest (2.35). De hypothese dat het tweede deel van het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de formele wereld wordt hiermee dus bevestigd.



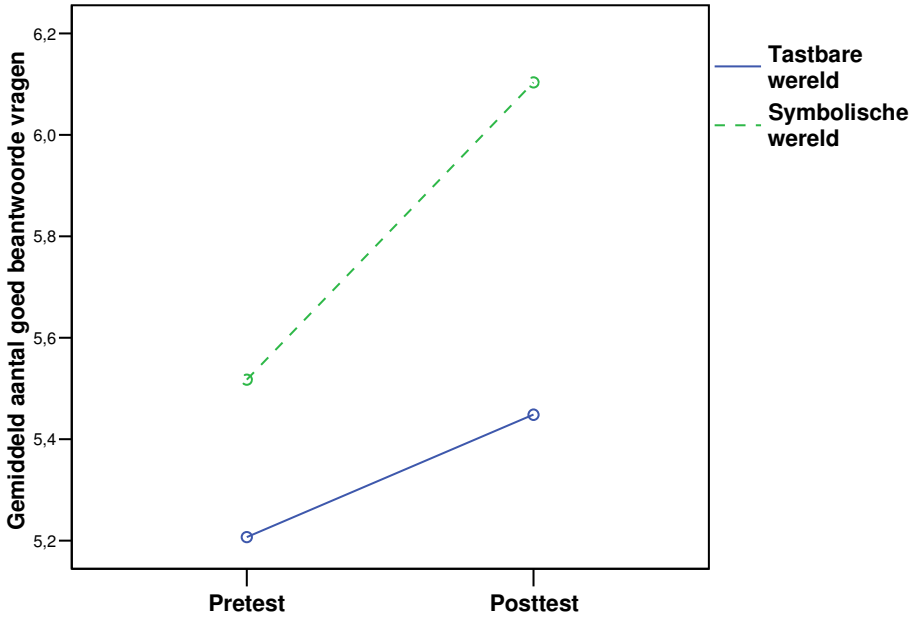
Figuur 4.3 - Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen op het formele niveau uitgezet tegen de tijd

Hypothese 1.3.b:
Van de vragen in de formele wereld wordt 50% goed beantwoord tijdens de posttest!

Uit de bovenstaande gegevens blijkt dat (3.45/7) 49% van de vragen uit de formele wereld tijdens de posttest goed wordt beantwoord. De hypothese (1.3.b) dat de leerlingen tijdens de poststest 50% van de vragen uit de formele wereld goed beantwoorden is dus niet juist, maar zit wel zeer dicht tegen de gestelde grens van 50% aan.

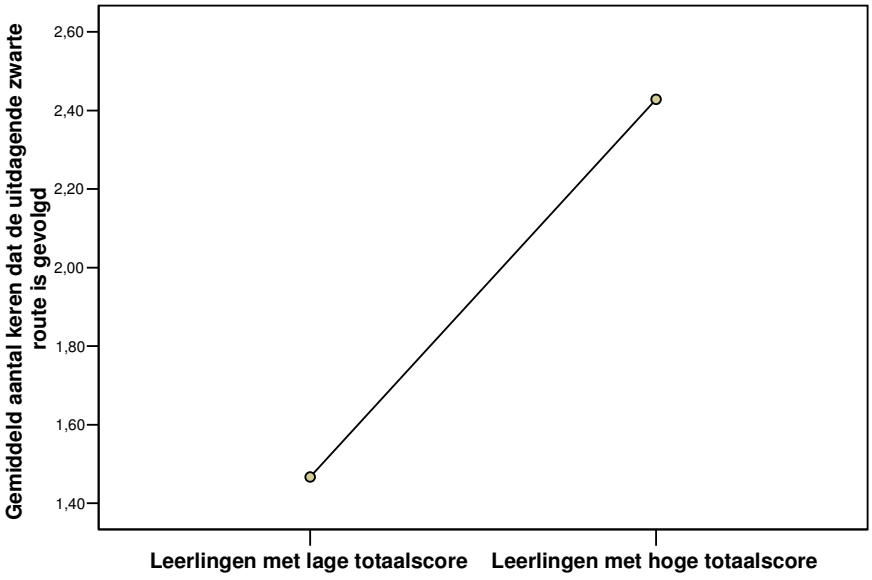
4.5. Opmerkelijkheden

a) Uit de gemiddelde scores van de verschillende testen blijkt dat de scores met betrekking tot de symbolische wereld hoger liggen dan die van de wezenlijke wereld. Uit de analyse blijkt dat er net geen significant verschil is tussen de totaalscore voor de wezenlijke wereld en de totaalscore voor de symbolische wereld (F(1.28)=3.84, p=.060). Er mag wel gesproken worden van een trend hetgeen ook uit figuur 4.4 is op te maken.



Figuur 4.4 – Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen op het tastbare en het symbolische niveau

b) Uit de data blijkt dat leerlingen die een hogere totaalscore hebben, vaker voor de uitdagende zwarte route aan het einde van een paragraaf kiezen. Uit de analyse blijkt dat er net geen significant verschil is tussen de totaalscore van een leerling en de gevolgde route (F(1.27)=3.40, p=.076). Ook hier mag wel gesproken worden van een trend hetgeen ook uit figuur 4.5 is op te maken.



Figuur 4.5 – Het gemiddeld aantal keren dat een leerling de uitdagende zwarte route heeft gekozen uitgezet tegen de groep (de 50% van de leerlingen met de laagste totaalscore tegenover de 50% van de leerlingen met de hoogste totaalscore) waartoe de leerling behoort.

5. Conclusies en discussie

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de bevindingen omtrent wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en omschrijven van algebraïsche expressies. Als eerste worden op basis van de resultaten van de geformuleerde hypotheses conclusies geformuleerd die antwoord geven op de hoofdvraag van het onderzoek. Verder wordt er ingegaan op opmerkelijkheden met betrekking tot het onderzoek, die aanleiding geven voor discussie en verder onderzoek.

5.1. Conclusies

Op basis van de resultaten met betrekking tot hypothese 1 kan worden geconcludeerd dat er sprake is van een groei in de wiskundige begripsvorming van de proefpersonen. Uit de resultaten blijkt dat het ontwikkelde lesmateriaal zorgt voor een verhoogd wiskundig begrip met betrekking tot de symbolische en de formele wereld (de hypotheses 1.2.a en 1.3.a). Deze groei is niet waargenomen in de tastbare wereld, hetgeen strookt met hypothese 1.1.a. Dit heeft te maken met het moment van toetsen. De leerlingen bevinden zich immers al in de tastbare wereld op het moment dat de pretest wordt afgenomen.

Maar groei alleen zegt nog niet voldoende. Ook het niveau van wiskundige begripsvorming moet in ogenschouw worden genomen. Op basis van de resultaten van hypotheses 1.1.b, 1.2.b en 1.3.b kan worden geconcludeerd dat alleen op het symbolische niveau de leerlingen aan de gesteld norm voldoen. Daarbij moet worden opgemerkt dat de score met betrekking tot de formele wereld met een gemiddelde van 49% zeer dicht tegen de gestelde grens van 50% aanzit. Daar de gestelde norm voor het percentage goed beantwoorde vragen met betrekking tot de tastbare en de symbolische wereld gelijk is (beide 80%), is het opmerkelijk dat de leerlingen wel het gewenste niveau wat betreft de symbolische wereld (het tweede niveau in de wereld van de wiskunde) behalen en niet wat betreft de tastbare wereld (het eerste niveau). Een mogelijke verklaring is dat wanneer een leerling eenmaal gewend is aan het werken op symbolisch niveau, dit veel minder gevoelig is voor fouten. De context die gepaard gaat met de tastbare wereld vormt in dit stadium juist een extra moeilijkheid.

De hoofdvraag van dit onderzoek, zoals deze in hoofdstuk 1 is geformuleerd, is:

- Draagt het ontwikkelde lesmateriaal bij aan wiskundige begripsvorming met betrekking tot het opstellen en herschrijven van algebraïsche expressies?

Op basis van de hierboven geschetste conclusies, kan worden gesteld dat het ontwikkelde lesmateriaal heeft bijgedragen aan de wiskundige begripsvorming bij de leerlingen, er is immers sprake van een groei. Als kritische kanttekening moet hierbij worden vermeld dat alleen op het symbolische niveau de gestelde norm is gehaald. Wat betreft het formele niveau zaten de leerlingen zeer dicht bij de gestelde eis.

5.2. Discussie

In het onderzoek is voor elk van de drie werelden van de wiskunde een norm gesteld (hypotheses 1.1.b, 1.2.b en 1.3.b) waaraan de leerlingen geacht worden te voldoen. Deze norm is subjectief. Wat door de ene onderzoeker als voldoende wordt bevonden, is voor de ander onvoldoende. Ik zal daarom toelichten waarom ik voor deze grenzen heb gekozen. De lat is voor de tastbare en de symbolische wereld vrij hoog gelegd (80% van de vragen moet goed worden beantwoord). Hier

zijn twee redenen voor te noemen. Ten eerste hebben de leerlingen naar het idee van de onderzoeker voldoende gelegenheid gekregen om te oefenen in de tastbare en de symbolische wereld zodat ook een redelijk niveau verwacht mag worden. Ten tweede kan over de vragen op de test worden gezegd dat ze niet afwijken van de vragen in het lesmateriaal. Alleen de basisvaardigheden met betrekking tot de tastbare en de symbolische wereld zijn dus getoetst. De norm met betrekking tot formele wereld (50% van de vragen moet goed worden beantwoord), is lager dan die voor de tastbare en symbolische wereld. De reden hiervoor ligt in het feit dat de leerlingen niet hebben kunnen oefenen met het soort opgaven dat in de testen is gesteld voor het vaststellen van het formele niveau. Het gaat in dit geval dus niet om basisvaardigheden die reeds getraind zijn. Dit maakte het mogelijk om na te gaan of er daadwerkelijk transfer heeft plaatsgevonden (de leerlingen kunnen het geleerde in een andere context toepassen). De helft van de vragen goed, is in dat geval naar het idee van de onderzoeker voldoende te noemen.

Uit de analyse van de gegevens kwam naar boven dat leerlingen die een hogere totaalscore hebben, vaker voor de uitdagende zwarte route kiezen. Er was net geen sprake van een significant verschil, maar er mag wel gesproken worden van een trend. De vraag die nu rijst, is of het nu juist de goede leerlingen zijn die voor de uitdagende route kiezen of dat de uitdagende route goede leerlingen aflevert. Ik vermoed het eerste hetgeen in zou houden dat de leerlingen een goed zelfbeeld hebben. De uitdagende route is immers geschreven voor de goede leerlingen die intellectueel uitgedaagd wil worden. Om dit na te gaan, zouden ook eerdere resultaten van de leerlingen bij het onderzoek betrokken moeten worden.

Tot slot wil ik ook nog even terugkomen op het verschijnsel dat de leerlingen zowel tijdens de pretest als de posttest beter scoren op het symbolische dan op het tastbare niveau. Dit heeft mij toch wel verbaasd. Als reden is al genoemd dat wanneer een leerling eenmaal gewend is aan het werken op symbolisch niveau, dit veel minder gevoelig is voor fouten. De context die gepaard gaat met de tastbare wereld vormt in dit stadium juist een extra moeilijkheid. Maar dit vormt slechts een verklaring voor het betere resultaat tijdens de posttest als de leerlingen ook daadwerkelijk hebben geoefend met opgaven op het symbolische niveau. Misschien raken we hier wel de reden waarom de ene leerling wel goed is in wiskunde en de ander niet. Wellicht zit er voor sommige leerlingen geen verband tussen de route- en oppervlaktemodellen en de algebraïsche uitdrukkingen. Het zijn losstaande werelden. De goede leerlingen kan paradigma's gebruiken om op terug te vallen. De slechte leerling heeft deze basis niet. Moet er dan toch langer op het tastbare niveau geoefend worden? En moet hier op een volgend niveau vaker naar terugverwezen worden? Moet er dan ook sneller gedifferentieerd worden tussen goede en slechte leerlingen? Voldoende reden voor verder onderzoek.

Literatuur

Akker, J. van der (1999). Principles and methods of development research. In: J. van der Akker, R. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & Tj. Plomp, *Design approaches and tools in education and training* (1-14). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Baarda, D.B. & Goede, M.P.M. de (1997). *Basisboek methoden en technieken: praktische handleiding voor het opzetten en uitvoeren van onderzoek*. Houten: Educatieve Partners Nederland

Dalen, D. van (2003). *Red het bèta-onderwijs van de ondergang*. Nieuwe Rotterdamse Courant

Drijvers, P., Goddijn, A., Kindt, M. (2006). Oriëntatie op schoolalgebra. In: P. Drijvers (Red.), *Wat a is, dat kun je niet weten: een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (7-23). Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Duursma, M. (2005). *Maar wat is een staartdeling*. NRC Handelsblad

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a Science of Mathematics Education*. Dordrecht: Riedel

Hiele, P. van (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press

Kaenders, K. (2003). Verum, pulchrum, bonum. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/4 (4), 161-164

Kaenders, K. (2005). Hij gooide boeken uit de trein. In: *Nieuwe Wiskrant*, 25 (1), 151-156

Kooij, H. van der (2002). Wiskundig Vaardig, de bijdrage van wiskunde aan (technische) beroepscompetenties. In: *(Eds.) Exacte vakken en competenties in het beroepsonderwijs* (49-80). 's-Hertogenbosch: Cinop

Lagerwerf, B. (2000). *Wiskundeonderwijs in de basisvorming: Een didactische ruggesteun voor wiskundedocenten*. Meppel: Drukkerij Giethoorn-Ten Brink

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. In: *Educational Studies in Mathematics*, 22 (2), 125-147

Tall, D. & Gray, E. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. In: *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141

Tall, D. Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M.& Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. In: *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81-104

Tall, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. In: *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (91-107). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan

Tall, D. (2004a). Introducing three worlds of mathematics. In: *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), 29-33

Tall, D. (2004b). *Mathematical growth: from child to mathematician*, draft

Verhoef, N.C. (2003). *Implementatie van ICT, een probleem voor docenten?* proefschrift Universiteit Twente

Verhoef, N.C. & Broekman, H.G.B. (2005). *A process of abstraction by representations of concepts*. Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australië,

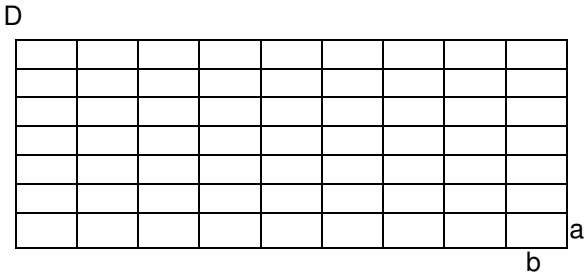
Vygotskij, L.S. (1960). *De ontwikkeling van de hogere psychische functies.* Razvitie vyss̃ich psichiĉeskyych funkcii. M.: APN. Vertaling: Wygotski (1964), Denken und Sprechen. Berlin: Akademie-Verlag

Bijlage - Testen

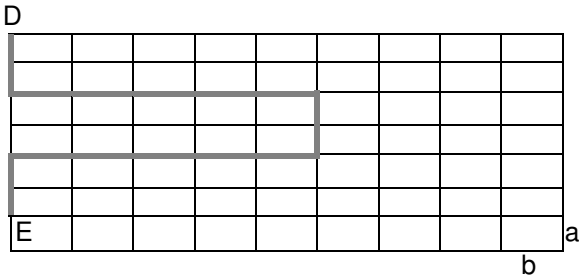
In deze bijlage staan de testen die zijn gebruikt voor het meten van de mate van wiskundige begripsvorming. De testen 1 en 2 hebben betrekking op de eerste paragraaf van het ontwikkelde lesmateriaal. De testen 3 en 4 op de tweede paragraaf, de testen 5 en 6 op de derde paragraaf en de testen 7 en 8 op de vierde paragraaf van het lesmateriaal.

Test 1 – Routes in Vakhorst

1 Teken in het rooster hiernaast vanuit punt D de route hoort bij de expressie:
2a + 3b + 4a + 5b

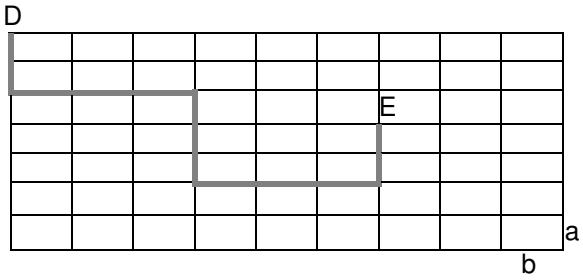


2 De route van punt D naar punt E kun je schrijven als 3·2a + 2·5b.



Schrijf 3·2a + 2·5b zo eenvoudig mogelijk.

3 Hans loopt elke dag 3 keer de getekende route van D naar E. Je kunt de afstand die Hans elke dag aflegt zonder haakjes schrijven in de vorm: __a + __b.



Vul de juiste getallen in op de streepjes: ____a + ____b

4 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 3a + 5b + 4a + b =

5 Schrijf zo eenvoudig mogelijk 3a + 2·8b =

6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 3(5a + 6b) =

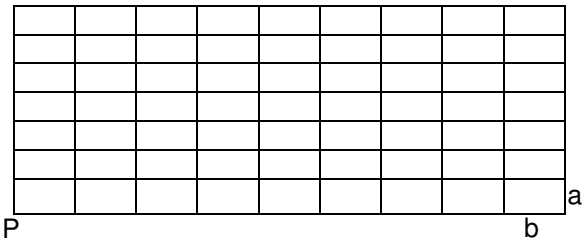
7 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 3a – 5b + 2c – a + 3b + 4c =

8 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. $\frac{1}{4} \cdot 3x + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y =$

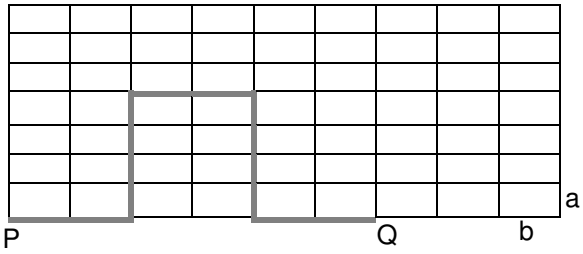
9 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. –3(4a – 5b) =

Test 2 – Routes in Vakhorst

1 Teken in het rooster hiernaast vanuit punt P de route hoort bij de expressie:
3a + 4b + 4a + 2b

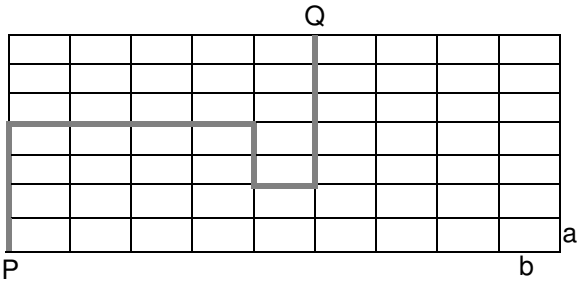


2 De route van punt P naar punt Q kun je schrijven als 2·4a + 3·2b.



Schrijf 2·4a + 3·2b zo eenvoudig mogelijk.

3 Ines loopt elke dag 5 keer de getekende route van P naar Q. Je kunt de afstand die Ines elke dag aflegt zonder haakjes schrijven in de vorm: __a + __b.



Vul de juiste getallen in op de streepjes: ____a + ____b

4 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 5a + 6b + a + 2b =

5 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 4·2a + 8b =

6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 3(4a + 7b) =

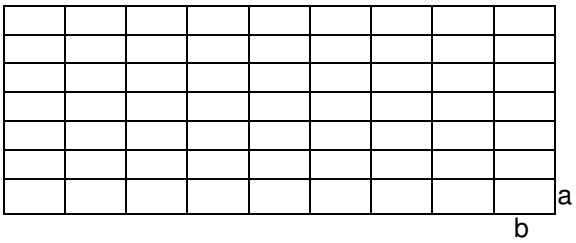
7 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. 3a – 5b + 3c – 4a – b +5c =

8 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. $-2 \cdot -3x + 4 \cdot -3y =$

9 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. $\frac{1}{3}(2a - \frac{2}{5}b) =$

Test 3 – Oppervlaktes in Vakhorst

1 Teken in het rooster hiernaast een rechthoekig gebied bij de gelijkheid: $3a \cdot 4b = 12ab$

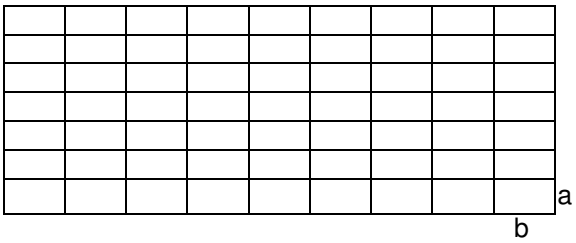


2 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $4a \cdot 12b =$

3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $-6a \cdot 2b =$

Test 4 – Oppervlaktes in Vakhorst

1 Teken in het rooster hiernaast een rechthoekig gebied bij de gelijkheid:
$2a \cdot 6b = 12ab$

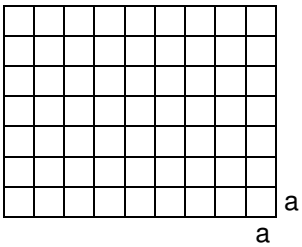


2 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $15a \cdot 3b =$

3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\frac{2}{3}a \cdot \frac{5}{7}b =$

Test 5 – Roosterkwartier

1 Teken in het rooster hiernaast een rechthoekig gebied bij de gelijkheid: $2a \cdot 5a = 10a^2$

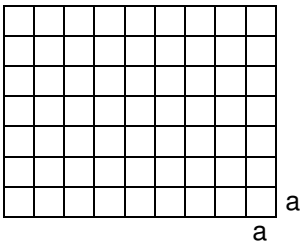


2 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $4a \cdot 12a =$

3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $3a \cdot -7a =$

Test 6 – Roosterkwartier

1 Teken in het rooster hiernaast een rechthoekig gebied bij de gelijkheid: $a \cdot 6a = 6a^2$

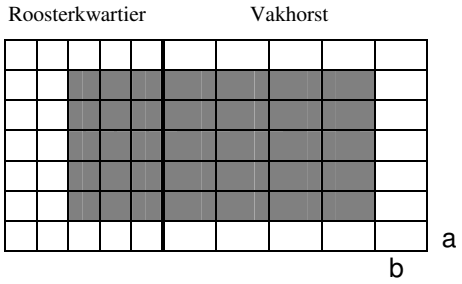


2 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $22a \cdot 4a =$

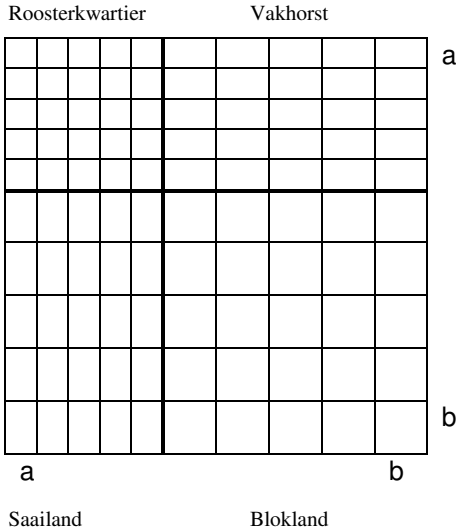
3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\frac{2}{5}a \cdot 3a =$

Test 7 – Op de grens

1 Welke gelijkheid hoort bij de rechthoek hiernaast?



2 Teken in het rooster een rechthoek met lengte 2a + 3b en breedte 4a + 2b. (verticaal noemen we de lengte en horizontaal de breedte)



3 Schrijf zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk: $6a\cdot(3a + 7b) =$

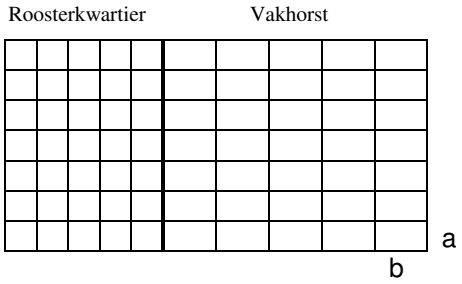
4 Vul in: $6a^2 + 12ab = 3a\cdot(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

5 Vul in: $\frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{4}ab = \frac{1}{2}a\cdot(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

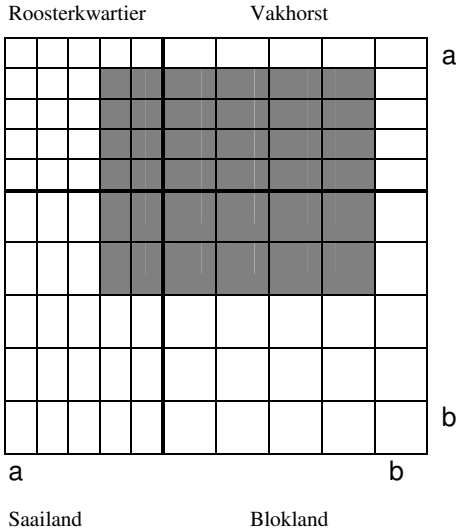
6 Vul de juiste getallen in: $a^2 + 7ab + 12b^2 = (\ldots..a + \ldots..b)\cdot(\ldots..a + \ldots..b)$

Test 8 – Op de grens

1 Teken in het rooster de rechthoek die hoort bij de gelijkheid $2a\cdot(4a + 3b) = 8a^2 + 6ab$.



2 Welke gelijkheid hoort bij de rechthoek hiernaast?



3 Schrijf zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk: $7a\cdot(2a + 4b) =$

4 Vul in: $8a^2 + 20ab = \ldots\ldots\cdot(2a + \ldots\ldots)$

5 Vul in: $-3a^2 + 4ab = a\cdot(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

6 Vul de juiste getallen in: $10a^2 + 7ab + b^2 = (\ldots..a + \ldots..b)\cdot(\ \ldots..a + \ldots..b)$